TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická

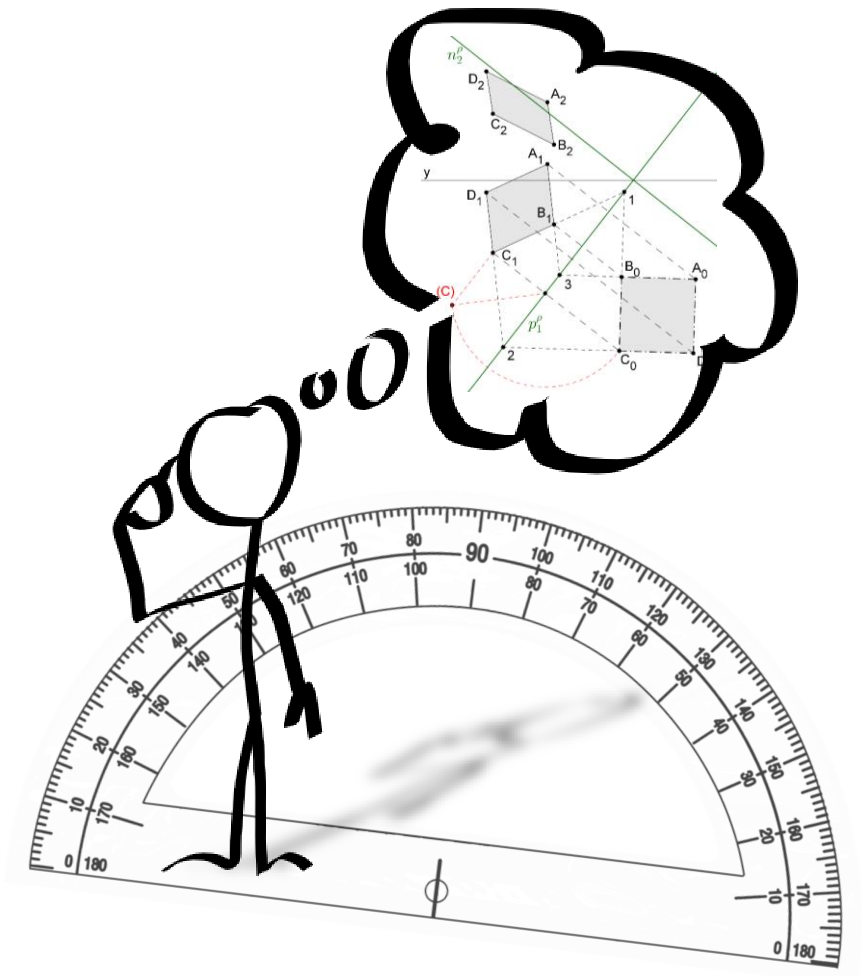
KATEDRA MATEMATIKY A DIDAKTIKY MATEMATIKY

Daniela **B í m o v á**

Petra **P i r k l o v á**

VYBRANÉ KAPITOLY Z GEOMETRIE

Pracovní sešit II



Liberec 2021

Určeno pro účastníky Opakovacího kurzu SŠ matematiky, geometrie a fyziky.

OBSAH

PŘEDMLUVA

Studijní text *Vybrané kapitoly z geometrie* slouží primárně jako pomůcka pro zopakování a shrnutí vybraných kapitol středoškolské geometrie a deskriptivní geometrie, které jsou potřebné pro další studium technických oborů na univerzitě. Text je určen pro účastníky *Opakovacího kurzu SŠ matematiky a geometrie* pořádaného katedrou matematiky a didaktiky matematiky Technické univerzity v Liberci. Celý text je rozdělen do dvou pracovních sešitů (kapitoly 1-2 a kapitoly 3-5). V textu jsou rozlišeny řešené příklady a zadání úloh k procvičení.

Pracovní sešit I obsahuje dvě kapitoly. První kapitola je věnována základním rovinným obrazcům a křivkám (kružnici a elipse). Tyto křivky jsou zde zmiňovány kvůli zobrazování kružnice v Mongeově promítání, které je dále potřebné pro zobrazování šroubovice a ploch. Kapitola druhá je zaměřena na připomenutí poznatků o základních tělesech. Jsou do ní zařazeny příklady určené k sestrojení základních těles na základě zadaných prvků. Na webovém linku *https://www.geogebra.org/m/cmnffkdq* jsou umístěna slovní a také grafická zadání úloh k procvičení v prostředí 3D okna programu GeoGebra. S užitím jeho nástrojů existuje možnost řešení úloh přímo v online prostředí tohoto programu. Na webovém linku *https://www.geogebra.org/m/kaggkbfq* se nachází vzorová řešení všech úloh k procvičení. Zopakovaných poznatků je s výhodou užito při řešení rovinných řezů hranolů a jehlanů. Zde upozorňujeme na dva webové linky, a to *https://www.geogebra.org/m/qwyzkk92* a *https://www.geogebra.org/m/pht5gqzn*. Na prvním z nich je uložena GeoGebra kniha se zadáním úloh k procvičení sestrojení rovinných řezů základních těles, na druhém z nich jsou pak umístěna pro možnost kontroly i vzorová řešení úloh k procvičení. Kapitola je zakončena propedeutickými úlohami věnovanými pravoúhlým pohledům na tělesa. Tyto úlohy vhodně uvádějí kapitolu, která je již obsažena v Pracovním sešitu II.

Úvodní kapitola ***Pracovního sešitu II*** je věnována opakování Mongeova promítání. Jsou zde zmíněny všechny základní úlohy. Každá z těchto úloh je doplněna pracovním listem k procvičení. Všechny úlohy jsou označeny číslem (např. PL 22), toto označení uvádí číslo zadaného příkladu v pracovních listech dostupných v GeoGebra knize na stránce *https://www.geogebra.org/m/dhhwyrwh*, kde jsou vloženy nejen obsáhlejší pracovní listy, ale také krokovaná řešení všech úloh včetně postupu řešení.

V další kapitole je zopakována analytická geometrie v rovině, která je potřebná k pochopení analytické geometrie v prostoru a diferenciální geometrie. Tato kapitola obsahuje velké množství neřešených úloh a také několik řešených příkladů. Všechny neřešené úlohy mají v hranatých závorkách uvedeno řešení. Je možné také nahlédnout do GeoGebra knihy *https://www.geogebra.org/m/z2kfhky3*, v níž jsou vloženy základní úlohy k procvičování analytické geometrie v rovině. Pro usnadnění čtení postupů geometrických konstrukcí je celý text v závěru doplněn přehledovou tabulku se seznamem geometrických symbolů. Pro každý uvedený symbol je zde zmíněn přehled možností označení a také je napsán popis, jak symbol čteme.

Věříme, že studijní materiál přispěje ke správné orientaci nejen v rovinné, ale i v prostorové geometrii a napomůže k následnému úspěšnému zvládnutí studia geometrie na naší univerzitě.

Autorky

3. MONGEOVO PROMÍTÁNÍ

3.1 PROMÍTÁNÍ

Promítání zobrazuje prostorové útvary do promítací roviny (**průmětna**).

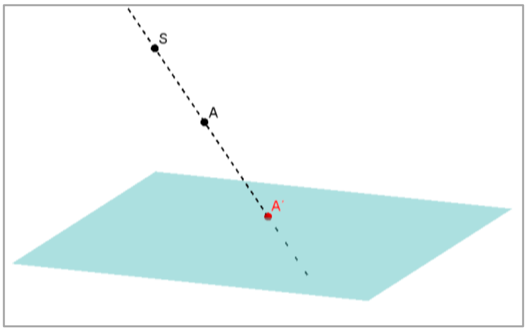
Dva typy promítání:

1) **Středové promítání** je dáno **středem promítání** S (bod v prostoru) a **průmětnou**, která bodem S neprochází.

   Princip promítání:

   1. každým bodem útvaru a středem promítání vedeme přímku (promítací přímku),
   2. průsečík promítací přímky s průmětnou je **středový průmět** bodu.

   Výhodou středového promítání je názornost, jeho nevýhodou složitost konstrukcí, zvláště metrických úloh.

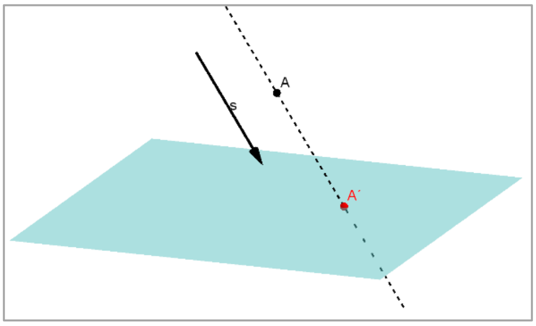


2) **Rovnoběžné promítání** je dáno **směrem promítání** a **průmětnou**, která není rovnoběžná se směrem promítání.

   Princip promítání:

   1. každým bodem útvaru vedeme přímku rovnoběžnou se směrem promítání (promítací přímku),
   2. průsečík promítací přímky s průmětnou je **rovnoběžný průmět** bodu.

   Výhodou rovnoběžného promítání je, že konstrukce nejsou složité. Nevýhodou pak jeho menší názornost.



   Rozdělení rovnoběžného promítání podle odchylky směru promítání a průmětny:

   a) pravoúhlé rovnoběžné promítání – směr promítání je kolmý na průmětnu,
   b) kosoúhlé rovnoběžné promítání – směr promítání je kosý k průmětně.

Výše popsaná promítání nejsou **vzájemně jednoznačným zobrazením** (tzn. z promítnutého obrazu nelze zpětně zrekonstruovat původní prostorový objekt).

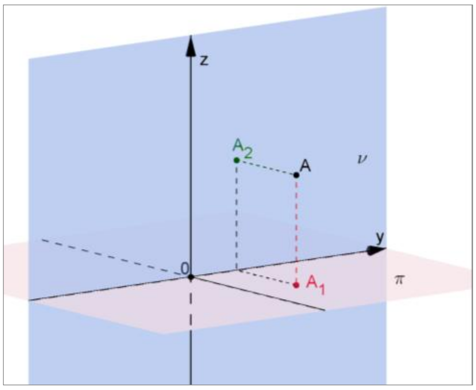
K získání vzájemně jednoznačného zobrazení je třeba zkombinovat alespoň dvě rovnoběžná promítání, případně středové a rovnoběžné promítání.

Např.
Mongeovo promítání – složeno ze dvou rovnoběžných (pravoúhlých) promítání na dvě k sobě kolmé průmětny,
lineární perspektiva – složena ze středového a rovnoběžného promítání na dvě průmětny,
pravoúhlá axonometrie – složena ze dvou až čtyř rovnoběžných (pravoúhlých) promítání na dvě až čtyři různoběžné průmětny.

3.2 PRINCIP MONGEOVA PROMÍTÁNÍ (MP)

MP je pravoúhlé rovnoběžné promítání na dvě (příp. tři) k sobě kolmé průmětny **půdorysnu** (π), **nárysnu** (ν), příp. **bokorysnu** (μ).

MP zachovává **incidenci, rovnoběžnost** a také **dělící poměr** (tzn. střed úsečky se zobrazí jako střed obrazu této úsečky).



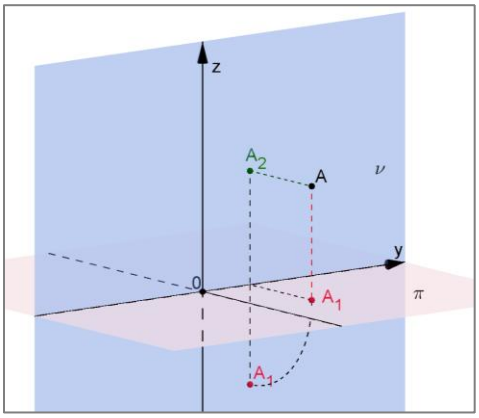
Souřadnicový systém:

- osa y (**základnice**) je průsečnice půdorysny a nárysny,
- souřadnicová rovina (xy) je půdorysna,
- souřadnicová rovina (yz) je nárysna,
- souřadnicová rovina (xz) je bokorysna.

3.3 ZOBRAZENÍ BODU

Obraz bodu v prostoru v MP získáme tak, že bodem vedeme kolmice k průmětnám. Tyto kolmice protnou průmětny v bodech:

- **půdorys** A_1 bodu A je jeho pravoúhlý průmět do půdorysny,
- **nárys** A_2 bodu A je jeho pravoúhlý průmět do nárysny,
- **bokorys** A_3 bodu A je jeho pravoúhlý průmět do bokorysny.



Sdružené průměty $[A_1, A_2]$ bodu A jsou půdorys a nárys tohoto bodu.

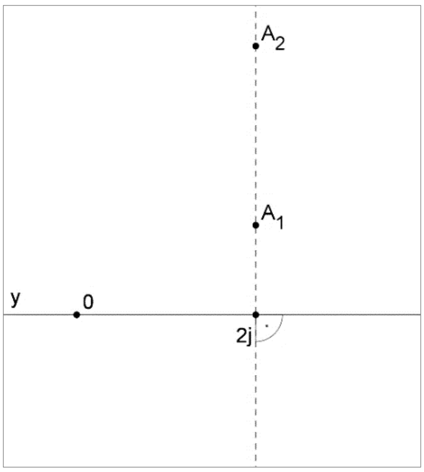
Zobrazení objektů do nákresny zajistíme tak, že jednu průmětnu otočíme kolem základnice do druhé průmětny, tím se půdorys a nárys jednoho bodu dostanou na přímku kolmou k základnici (**ordinála**).

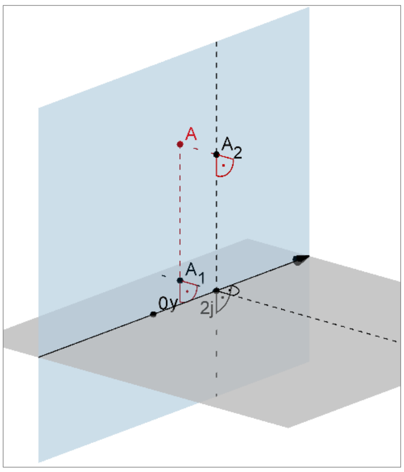
Určení sdružených průmětů bodu $A[x, y, z]$:

a) na osu y vyneseme souřadnici y bodu A (**kladná** doprava, **záporná** doleva od počátku soustavy souřadnic),
b) sestrojíme kolmici k ose y (ordinálu) v tomto bodě na ose y,
c) na kolmici (ordinálu) naneseme x-ovou a z-ovou souřadnici bodu A:
   - **kladná** x-ová souřadnice bodu se vynáší dolů, **záporná** nahoru,
   - **kladná** z-ová souřadnice bodu se vynáší nahoru, **záporná** souřadnice dolů.

Příklad 3.1. Určete sdružené průměty bodu $A[-1; 2; 3]$.

1. Od počátku soustavy souřadnic vyneseme doprava y-ovou souřadnici $y_A = 2$,
2. v bodě na ose y vzdáleného od počátku o 2 jednotky vztyčíme kolmici (ordinálu),
3. na ordinálu vyneseme x-ovou souřadnici nahoru ($x_A = -1$) … získáme půdorys A_1 bodu A,
4. na ordinálu vyneseme z-ovou souřadnici nahoru ($z_A = 3$) … získáme nárys A_2 bodu A.





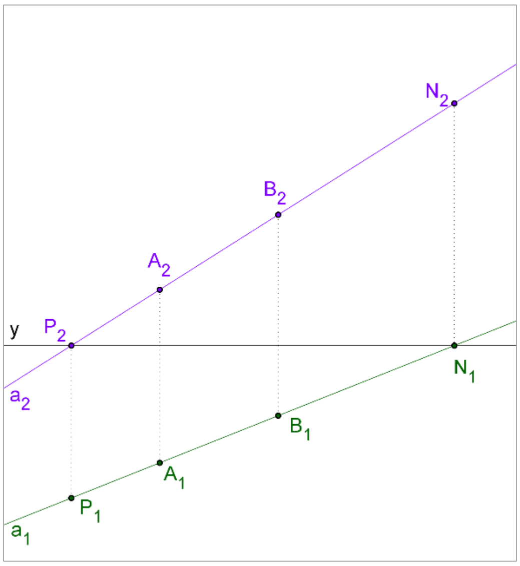
Úloha 3.1. Zobrazte tyto body a určete, jakou mají polohu vůči průmětnám: $E[0; 3; 5], F[0; 2; -3], G[-3; -3; 0], H[2; -5; 0], K[1; 0; 1], L[-3; 1; 3], M[-2; 4; -2], N[1; -2; -1]$ (PL 2).	**Úloha 3.2.** Zobrazte body a určete jejich polohu vůči průmětnám: $A[-1; 2; 3], B[2; -3; -5], C[3; 0; 4], D[-3; 3; -5]$ (PL 1).

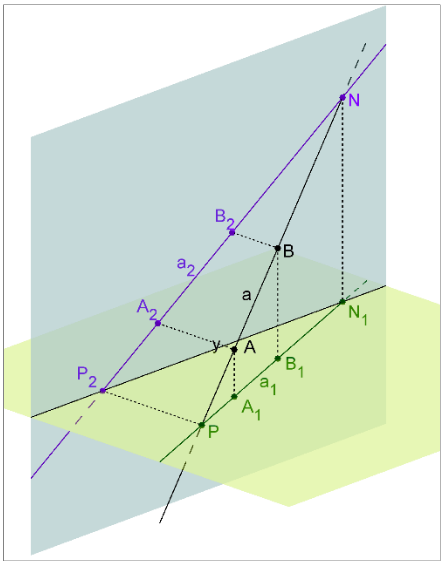
3.4 ZOBRAZENÍ PŘÍMKY

Průmětem přímky v MP je **bod**, je-li přímka rovnoběžná se směrem promítání, nebo **přímka**.

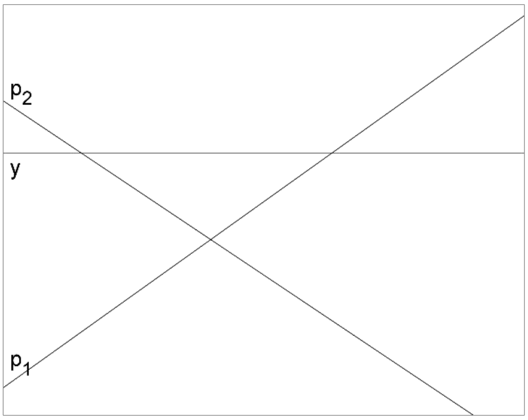
Důležitými body na přímce jsou **stopníky**, což jsou body, ve kterých přímka protíná průmětnu.

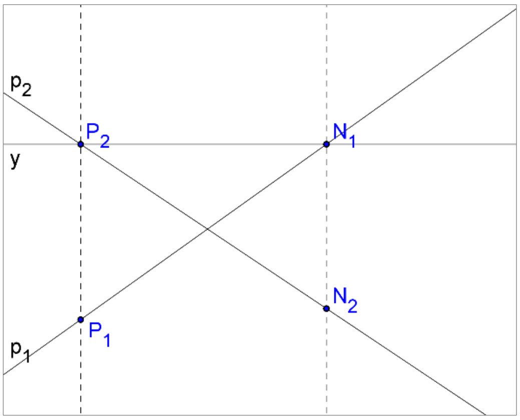
- **Půdorysný stopník $\boldsymbol{P}$** je bod, ve kterém přímka protíná půdorysnu ($P \in \pi \Rightarrow P_1 \cong P, P_2 \in y$).
- **Nárysný stopník $\boldsymbol{N}$** je bod, ve kterém přímka protíná nárysnu ($N \in \nu \Rightarrow N_2 \cong N, N_1 \in y$).





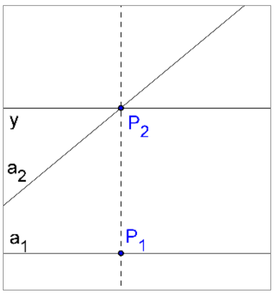
Příklad 3.2. Určete stopníky přímky p.



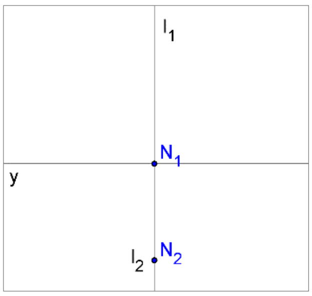


1. $P = \pi \cap p \Rightarrow P_2 = y \cap p_2$
2. $P_1 \in p_1 \wedge P_1P_2 \perp y$
3. $N = \nu \cap p \Rightarrow N_1 = y \cap p_1$
4. $N_2 \in p_2 \wedge N_1N_2 \perp y$

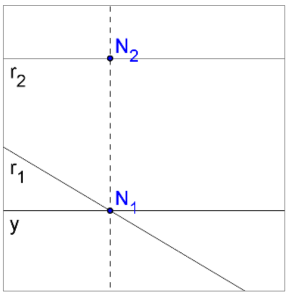
Zvláštní polohy přímek



$a \parallel \nu$

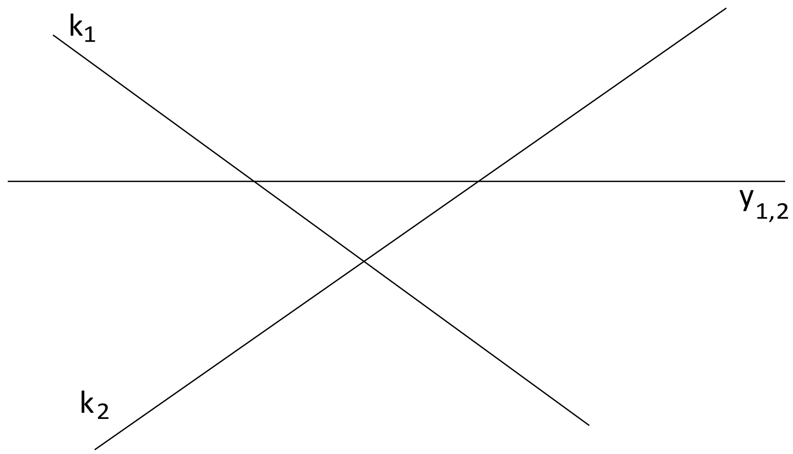


$l \parallel \nu \ \wedge l \perp \pi$

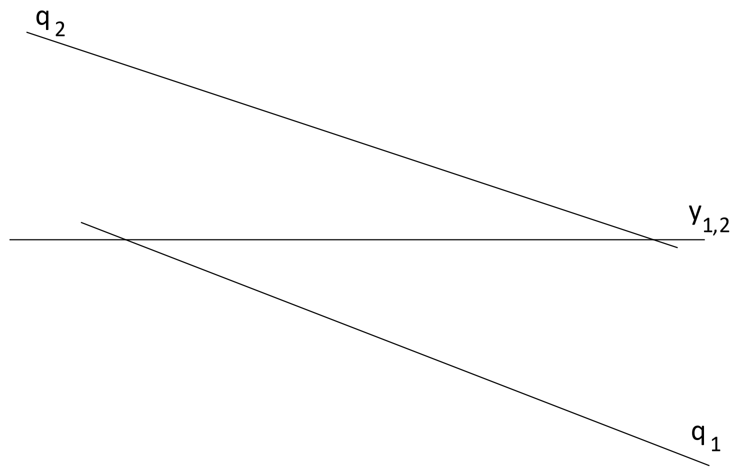


$r \parallel \pi$

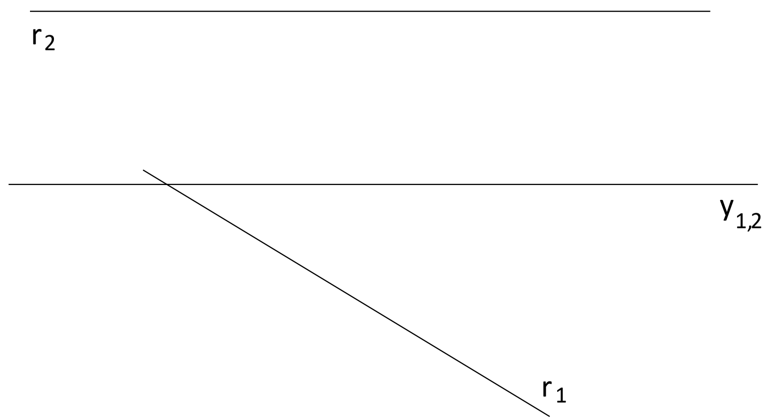
Úloha 3.3. Určete stopníky přímky k (PL 13).



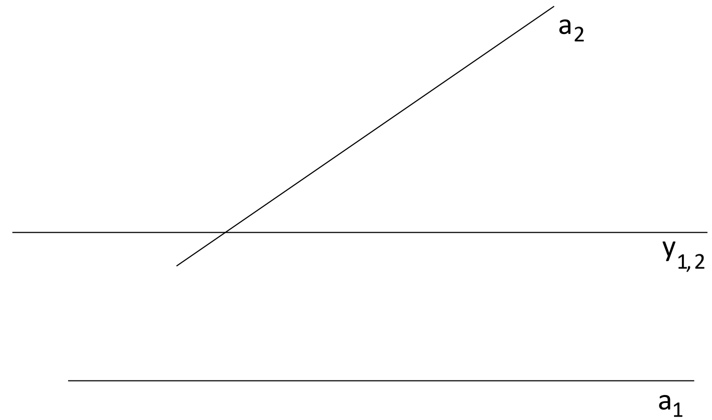
Úloha 3.4. Určete stopníky přímky q (PL 9).



Úloha 3.5. Určete stopníky přímky r (PL 14).



Úloha 3.6. Určete stopníky přímky a (PL 10).



3.5 ZOBRAZENÍ ROVINY

Průmětem roviny je **celá průmětna** nebo **přímka.** Přímka je průmětem roviny, pokud je rovina **promítací**, tedy kolmá k průmětně.

K určení roviny v MP jsou důležité stopy roviny. **Stopa roviny** je průsečnice roviny s průmětnou:

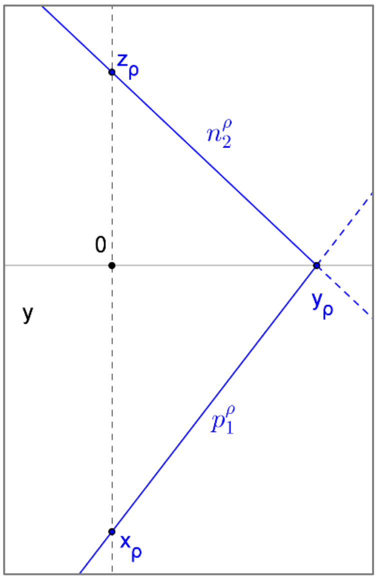
- **půdorysná stopa p^{ρ}** je průsečnice roviny ρ s půdorysnou,
- **nárysná stopa n^{ρ}** je průsečnice roviny ρ s nárysnou.

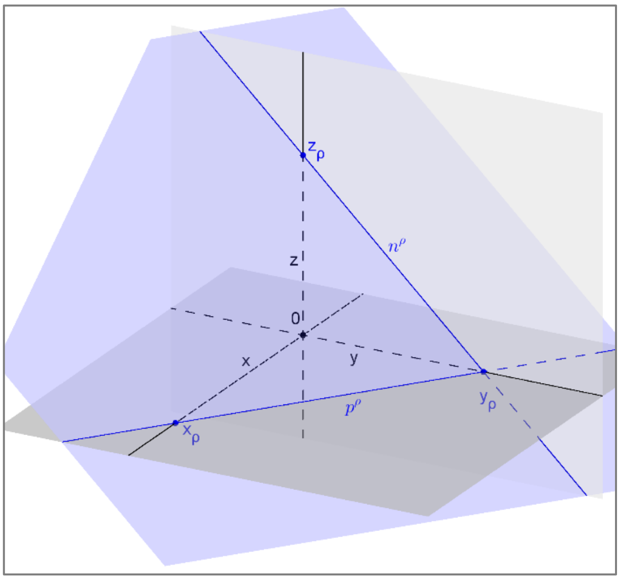
Poznámka: Půdorysná a nárysná stopa se vždy protínají na základnici.

Souřadnice roviny $\rho = (x_\rho; y_\rho; z_\rho)$ značí průsečík roviny s příslušnou souřadnicovou osou: $(\rho = (XYZ), X[x_\rho, 0, 0], Y[0, y_\rho, 0], Z[0, 0, z_\rho])$.

Vynášení souřadnic roviny:

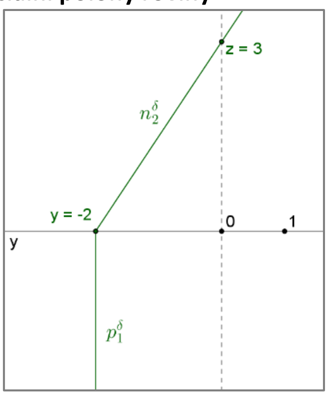
1) Na základnici vyneseme souřadnici y_ρ roviny ρ. Kladná je vynášena doprava, záporná doleva.
2) V počátku soustavy souřadnic vztyčíme kolmici.
3) Na kolmici naneseme souřadnici x_ρ a z_ρ roviny ρ, podle stejných pravidel jako u vynášení souřadnic bodu.



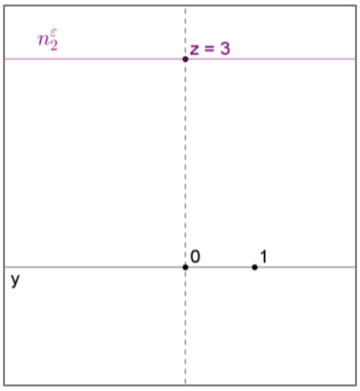


Pozn.: Kvůli názornosti se půdorysná stopa roviny pod základnicí rýsuje plnou čarou, nad ní čárkovanou a nárysná stopa nad základnicí plně, pod ní čárkovaně.

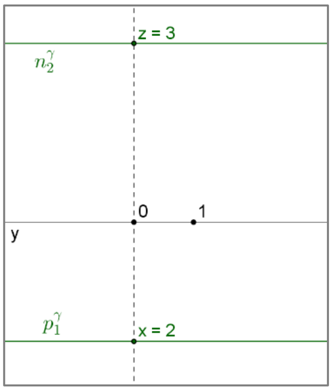
Speciální polohy roviny



$\delta \perp \nu; \delta = (\infty; y_\delta = -2; z_\delta = 3)$



$\varepsilon \parallel \pi; \varepsilon = (\infty; \infty; z_\varepsilon = 3)$



$\gamma \parallel y; \gamma = (x_\gamma = 2; \infty; z_\gamma = 3)$

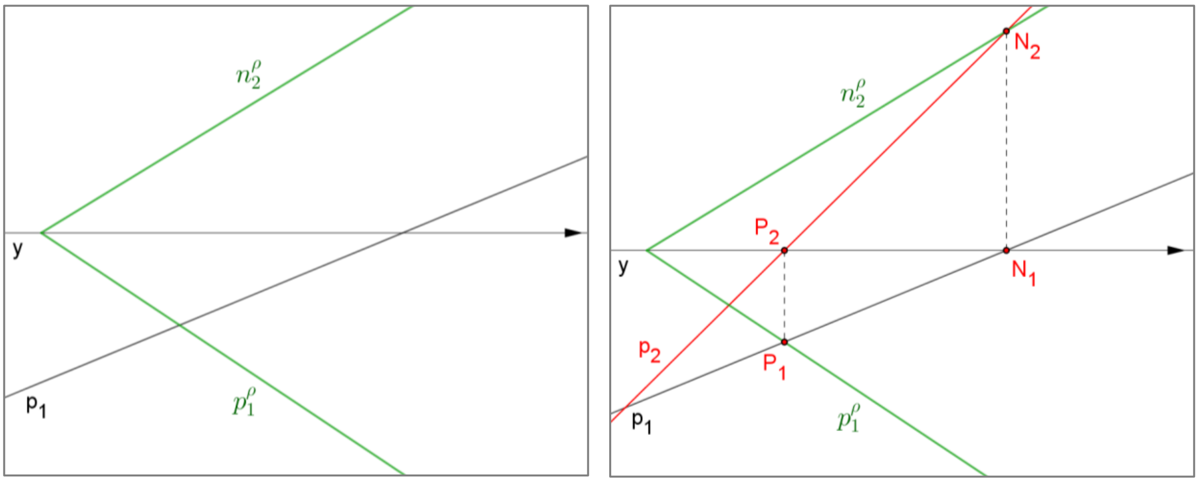
Úloha 3.7. Zobrazte stopy roviny $\delta = (\infty; -2; 3)$ a roviny $\varepsilon = (\infty; \infty; 3)$ (PL 22).	**Úloha 3.8.** Zobrazte stopy roviny $\beta = (-3; 3; 2)$ (PL 19).
Úloha 3.9. Zobrazte stopy roviny $\gamma = (2; \infty; 3)$ (PL 21).	**Úloha 3.10.** Zobrazte stopy roviny $\alpha = (3; -4; 2{,}5)$ (PL 20).

3.6 POLOHOVÉ ÚLOHY

A. PŘÍMKA V ROVINĚ

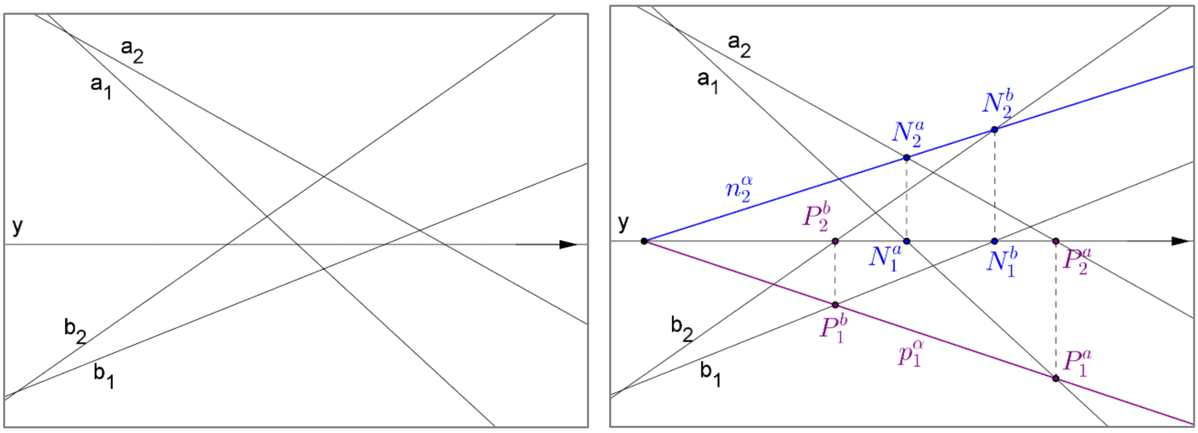
Věta 3.1: Leží-li přímka v rovině, pak její stopníky leží na stopách roviny. Nárys nárysného stopníku leží na nárysné stopě, půdorys půdorysného stopníku leží na půdorysné stopě.

Příklad 3.3. Sestrojte nárys přímky p ležící v rovině ρ dané stopami, jestliže známe její půdorys.



1. Určíme půdorysy stopníků na přímce p_1: $P_1 = p_1^\rho \cap p_1, N_1 = y \cap p_1$.
2. Sestrojíme nárysy stopníků: $P_2 \in y, N_2 \in n_2^\rho$.
3. Nárys p_2 přímky p prochází nárysy stopníků: $p_2 = P_2N_2$.

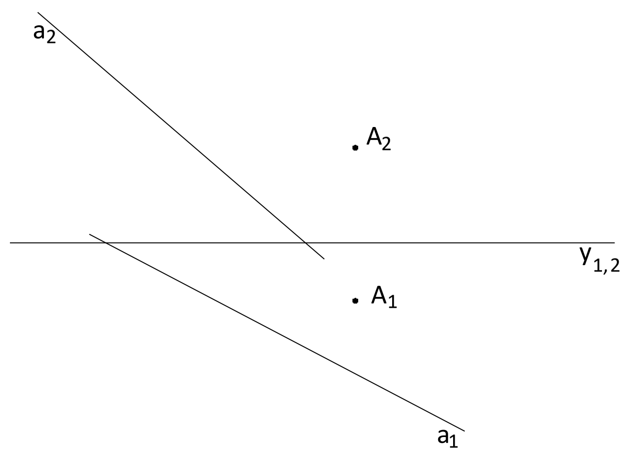
Příklad 3.4. Sestrojte stopy roviny α, která je dána dvěma různoběžkami *c*, *d*.



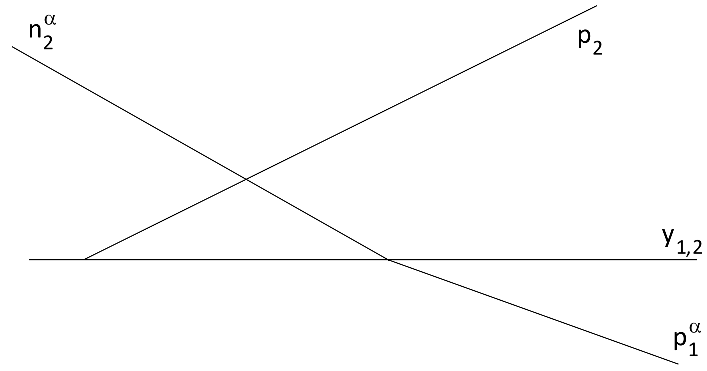
1. Určíme stopníky přímky a ležící na ose y: $N_1^a = a_1 \cap y, P_2^a = a_2 \cap y$.
2. Sestrojíme druhé průměty těchto bodů: $N_2^a \in a_2, P_1^a \in a_1$.
3. Určíme stopníky přímky b ležící na ose y: $N_1^b = b_1 \cap y, P_2^b = b_2 \cap y$.
4. Sestrojíme druhé průměty těchto bodů: $N_2^b \in b_2, P_1^b \in b_1$.
5. Spojením nárysů nárysných stopníků získáme nárysnou stopu roviny: $N_2^a N_2^b = n_2^\alpha$.
6. Spojením půdorysů půdorysných stopníků získáme půdorysnou stopu roviny: $P_1^a P_1^b = p_1^\alpha$.

Pozn.: Stopy se musí protnout na ose y.

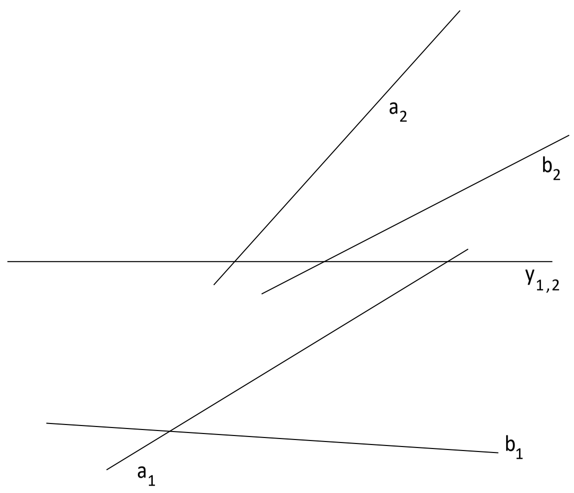
Úloha 3.11. Sestrojte stopy roviny $\alpha = (aA)$ (PL 28).



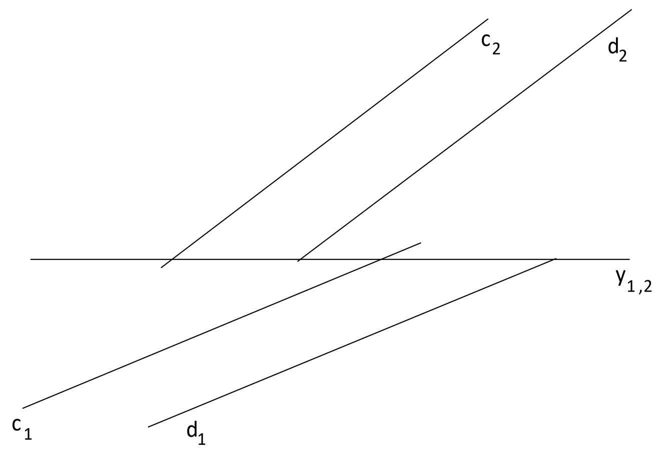
Úloha 3.12. Zobrazte přímku p, ležící v rovině α (PL 38).



Úloha 3.13. Určete stopy roviny ρ dané různoběžkami a, b (PL 41).



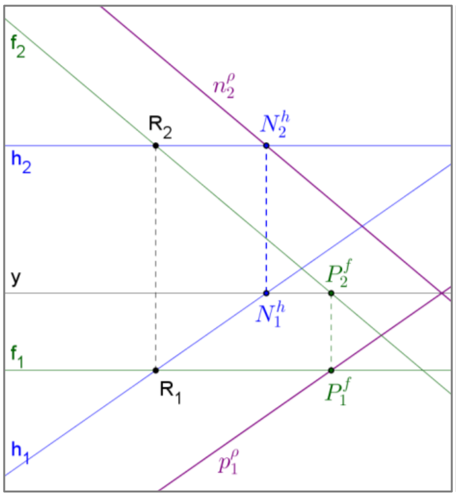
Úloha 3.14. Najděte stopy roviny β dané přímkami c, d (PL 42).

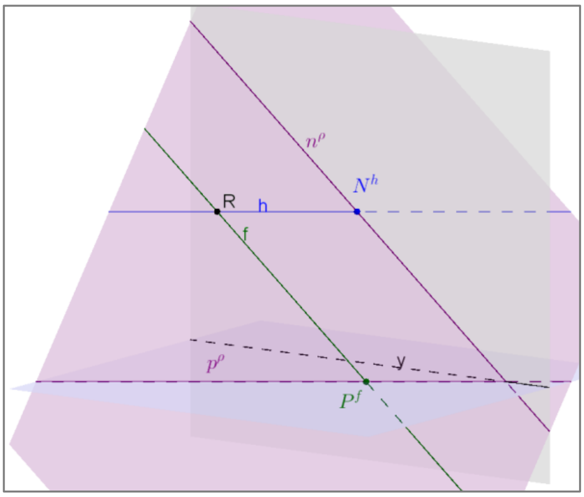


SPECIÁLNÍ PŘÍMKY V ROVINĚ

a) **HLAVNÍ PŘÍMKY ROVINY** jsou přímky v rovině, které jsou rovnoběžné s průmětnou.

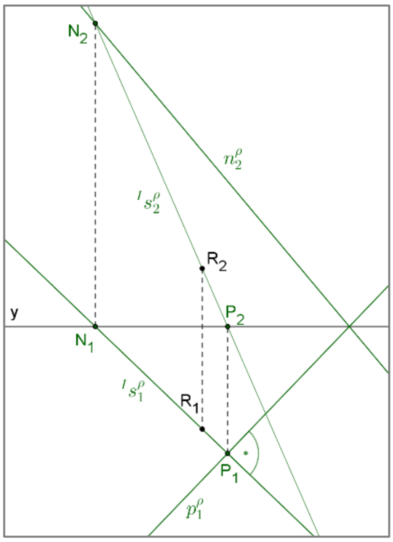
- **Horizontální hlavní přímky roviny** ρ (h^{ρ}) jsou rovnoběžné s půdorysnou ($h_1^{\rho} \parallel p_1^{\rho}, h_2^{\rho} \parallel y$).
- **Frontální hlavní přímky roviny** ρ (f^{ρ}) jsou rovnoběžné s nárysnou ($f_2^{\rho} \parallel n_2^{\rho}, f_1^{\rho} \parallel y$).

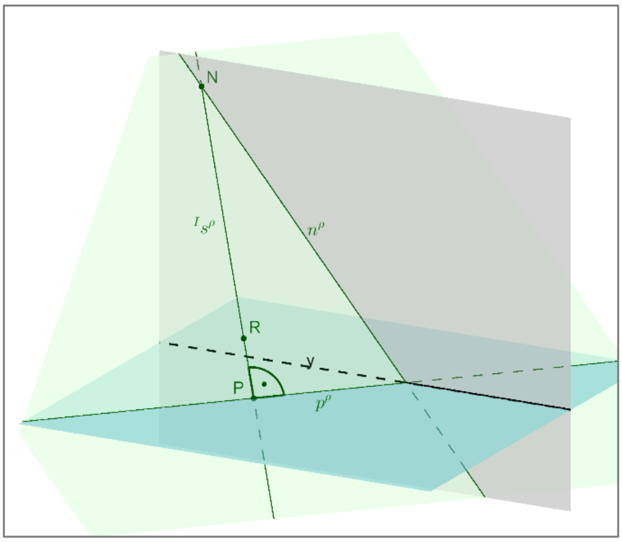




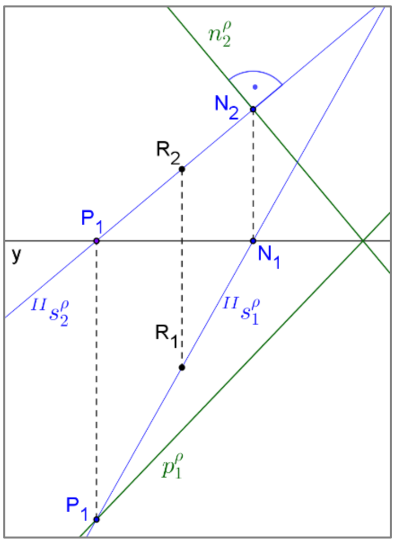
b) **SPÁDOVÉ PŘÍMKY ROVINY** jsou přímky v rovině, které jsou kolmé ke stopě roviny.

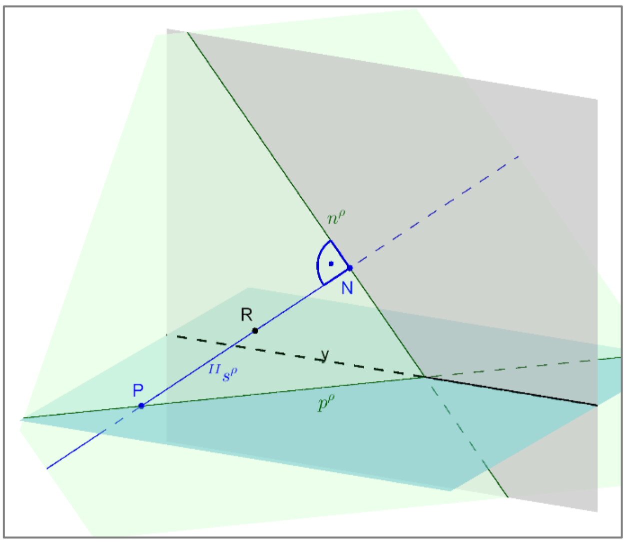
- **Spádové přímky první osnovy** (${}^{I}s^{\rho}$) jsou kolmé na půdorysnou stopu (${}^{I}s_1^{\rho} \perp p_1^{\rho}$).





- **Spádové přímky druhé osnovy** (${}^{II}s^{\rho}$) jsou kolmé na nárysnou stopu (${}^{I}s_2^{\rho} \perp n_2^{\rho}$).

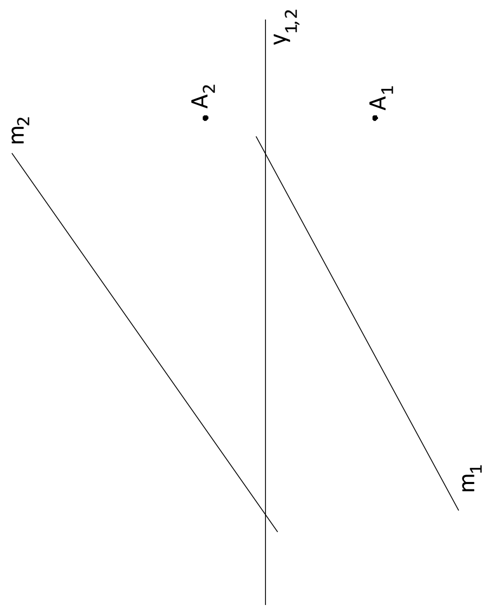




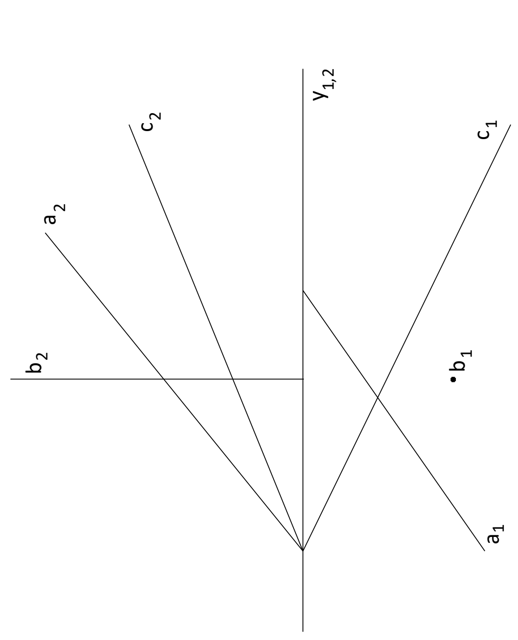
ZOBRAZENÍ DVOJICE PŘÍMEK, Z NICHŽ ANI JEDNA NENÍ KOLMÁ K PRŮMĚTNĚ

1. **Rovnoběžky –** jejich první i druhé průměty jsou rovnoběžné.
2. **Různoběžky** – zobrazí se jako různoběžky, jejichž průsečíky **leží** na ordinále.
3. **Mimoběžky** - zobrazí se jako různoběžky, jejichž průsečíky **neleží** na ordinále.

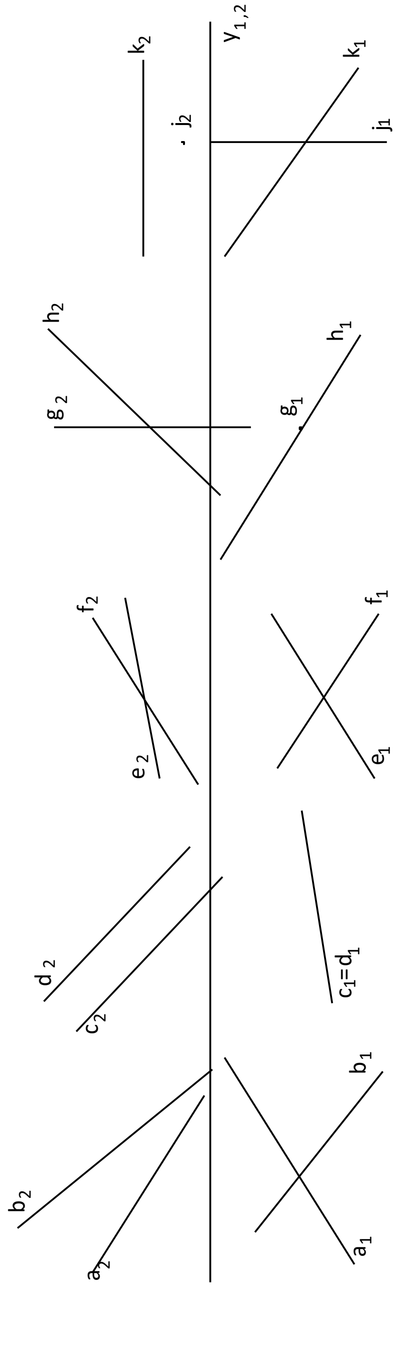
Úloha 3.15. Bodem A veďte rovnoběžku s nárysnou tak, aby protínala přímku m (PL 16).



Úloha 3.16. Sestrojte přímku r, která je rovnoběžná s přímkou a, protíná přímku b a současně protíná přímku c (PL 18).



Úloha 3.17. Určete vzájemnou polohu přímek (PL 17)

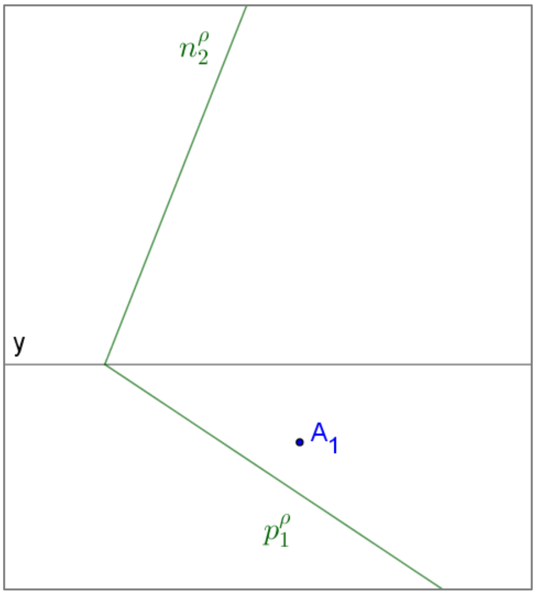


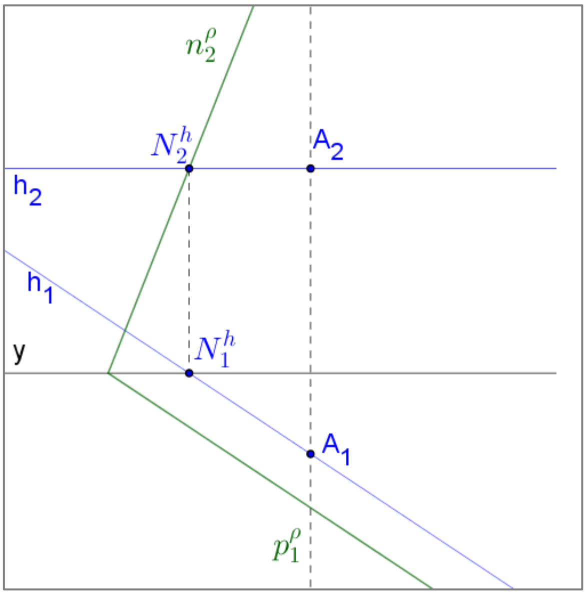
B. BOD V ROVINĚ

Je-li v MP v rovině dán bod jedním svým průmětem a chceme-li určit jeho chybějící průmět, postupujeme následovně:

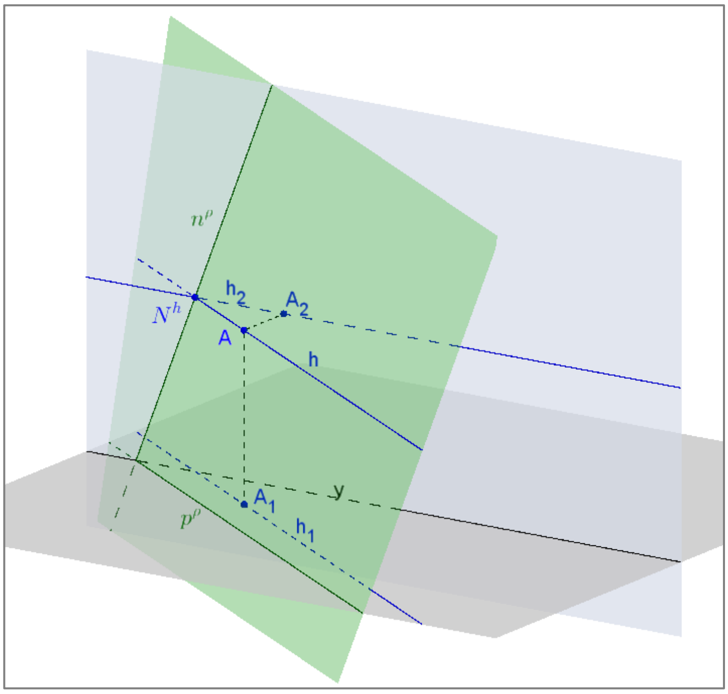
1) daným průmětem bodu proložíme libovolnou přímku roviny,
2) pomocí stopníků zvoleného průmětu přímky určíme druhý, chybějící průmět přímky,
3) na určeném průmětu přímky leží hledaný průmět bodu.

Příklad 3.5. V rovině ρ dané stopami je dán půdorys bodu A_1, určete jeho nárys.



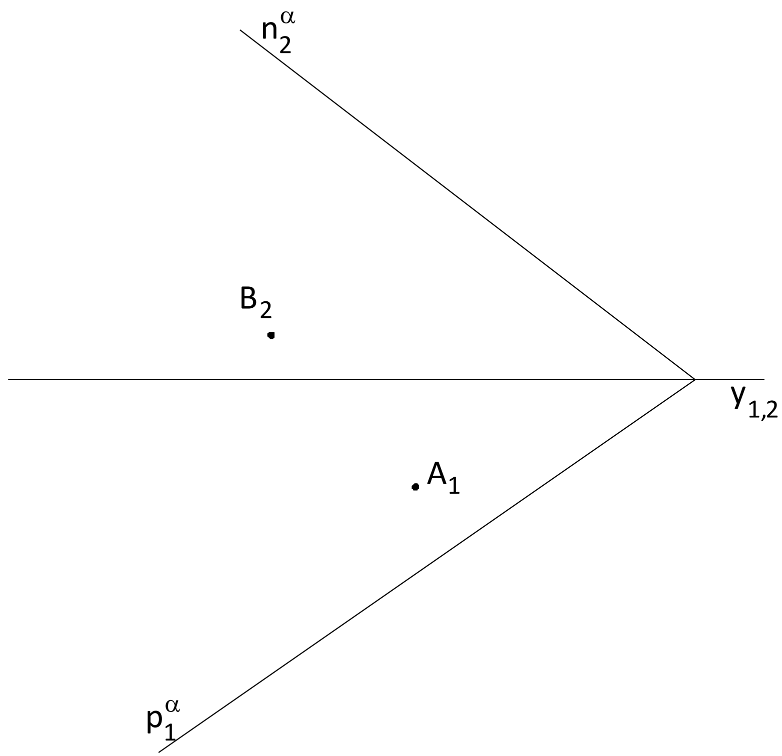


1. Bodem A_1 vedeme půdorys libovolné přímky roviny, nejčastěji se užívají hlavní přímky. V tomto řešení je použita horizontální hlavní přímka: $h_1 \parallel p_1^\rho \wedge A_1 \in h_1$.
2. Určíme stopník hlavní přímky: $N_1^h = h_1 \cap y$.
3. Sestrojíme nárys N_2^h stopníku N hlavní přímky: $N_2^h \in n_2^\rho$ (hlavní přímka h leží v rovině ρ).
4. Nárysem N_2^h vedeme nárys horizontální hlavní přímky: $h_2 \parallel y \wedge N_2^h \in h_2$.
5. Protože A_1 leží na h_1 musí také A_2 ležet na h_2.



Úloha 3.18. Bodem $B[1; 0; ?\,]$ proložte libovolnou přímku roviny $\beta = (5; -3; 2)$ a nalezněte nárys bodu B (PL 43).

Úloha 3.19. Sestrojte obrazy bodů A, B ležících v rovině α (PL 39).

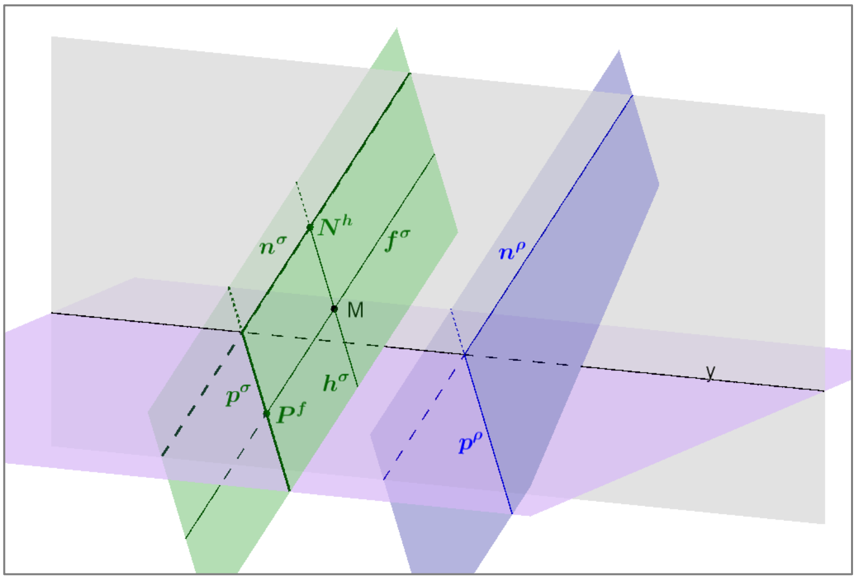


C. ROVINA ROVNOBĚŽNÁ S DANOU ROVINOU

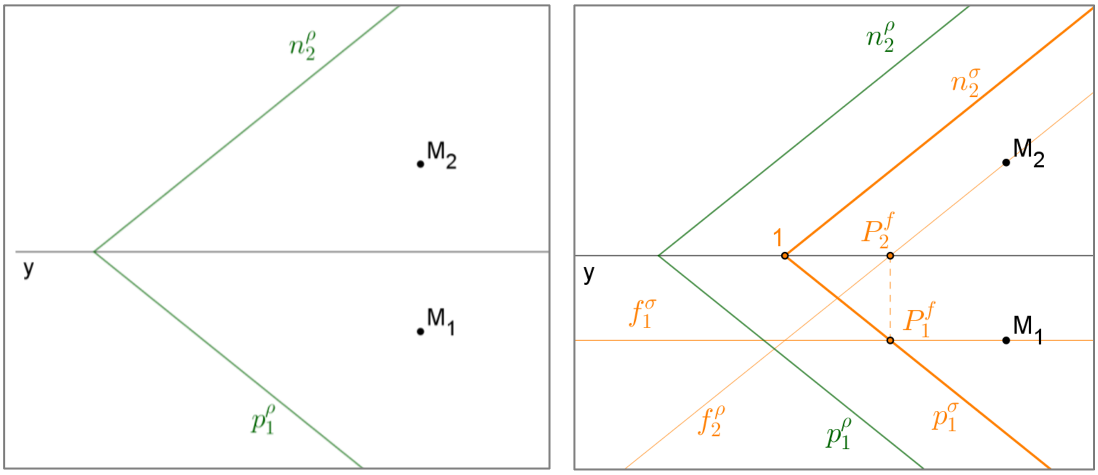
Zobrazení dvojice rovin, pokud ani jedna z rovin není promítací:

a) **rovnoběžné roviny** – průměty příslušných stop obou rovin jsou rovnoběžné.
b) **různoběžné roviny** – průměty příslušných stop jsou různoběžné.

K sestrojení stop rovnoběžné roviny využijeme vzájemné rovnoběžnosti stop rovin a příslušných hlavních přímek. Stopy rovnoběžných rovin jsou rovnoběžné právě tehdy, když příslušné hlavní přímky rovin jsou rovnoběžné se stopami a také rovnoběžné vzájemně.



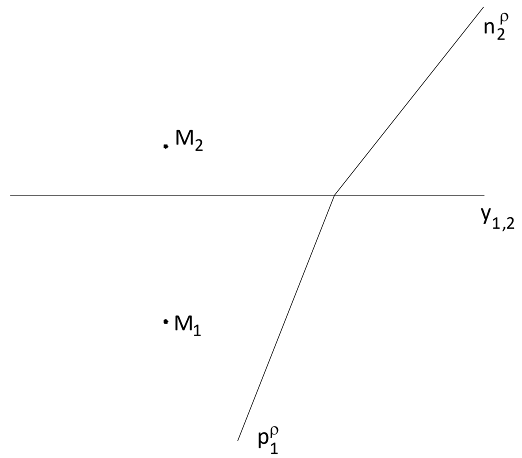
Příklad 3.6. Bodem *M*, který neleží v rovině ρ, veďte rovinu σ rovnoběžnou s danou rovinou.



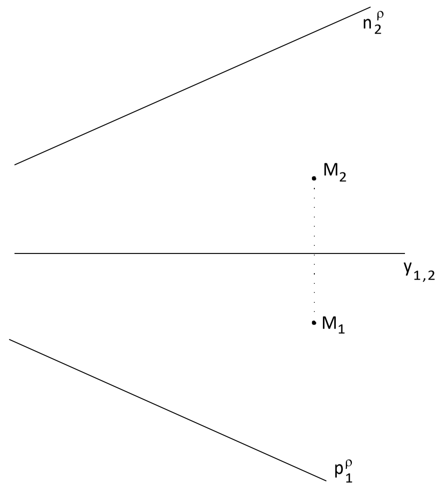
1. Bodem M vedeme libovolnou hlavní přímku hledané roviny: $f_1^{\sigma} \parallel y \wedge M_1 \in f_1^{\sigma}$, $f_2^{\sigma} \parallel n_2^{\rho} \wedge M_2 \in f_2^{\sigma}$.
2. Určíme stopník této hlavní přímky: $P_2 = f_2^{\sigma} \cap y \rightarrow P_1 \in f_1^{\sigma}$.
3. Tímto stopníkem prochází stopa hledané roviny rovnoběžně se stopou dané roviny: $P_1 \in p_1^{\sigma} \wedge p_1^{\sigma} \parallel p_1^{\rho}$.
4. Nalezená stopa protíná základnici. Tímto průsečíkem prochází nárysná stopa hledané roviny rovnoběžně s nárysnou stopou dané roviny:

Pozn.: Nárysnou stopu lze také určit pomocí nárysného stopníku horizontální hlavní přímky hledané roviny σ procházející bodem *M*.

Úloha 3.20. Bodem M veďte rovinu σ rovnoběžnou s rovinou ρ (PL 75).

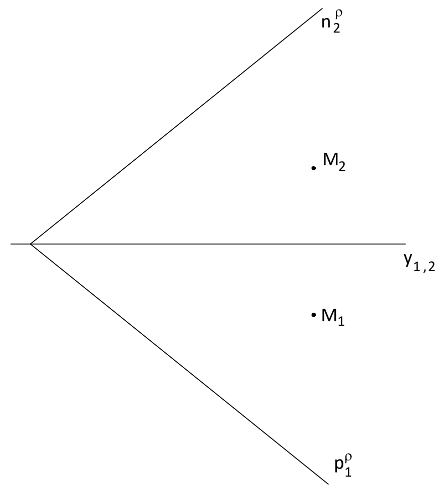


Úloha 3.21. Bodem M veďte rovinu σ rovnoběžnou s rovinou ρ (PL 73).

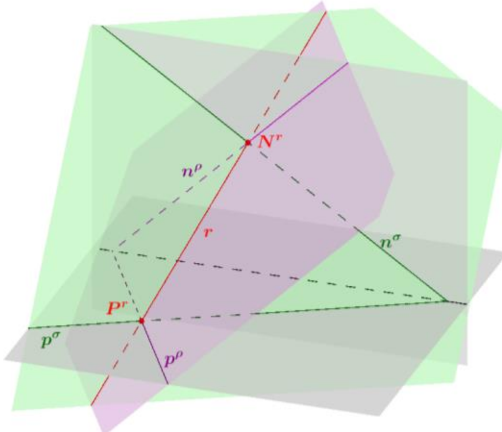


Úloha 3.22. Bodem $M[3; 1; 3]$ veďte rovinu ρ, rovnoběžnou s rovinou $\sigma = (-2;\ 5;\ 3)$ (PL 77).

Úloha 3.23. Bodem M veďte rovinu σ rovnoběžnou s rovinou ρ (PL 74).



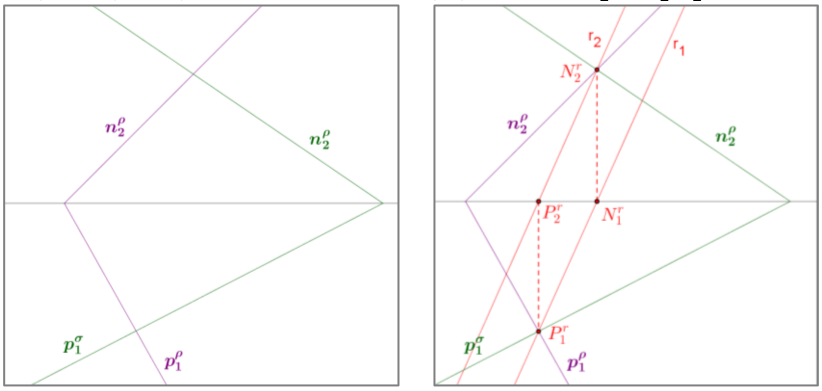
D. PRŮSEČNICE DVOU ROVIN



Průsečnice dvou rovin leží v obou rovinách, tedy stopníky průsečnice jsou průsečíky příslušných stop rovin.

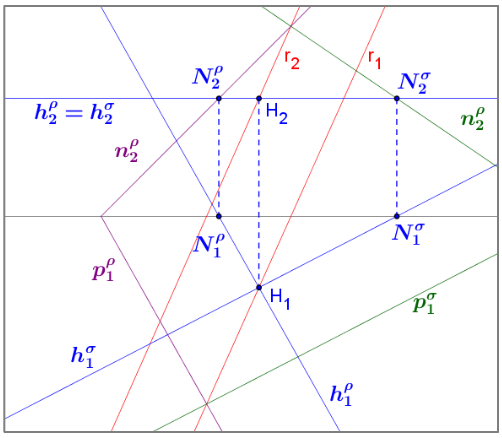
Příklad 3.7. Sestrojte průsečnici r dvou rovin ρ a σ, jenž jsou zadané stopami.

1. Průsečík půdorysných stop je půdorys půdorysného stopníku průsečnice: $P_1^r = p_1^\rho \cap p_1^\sigma$.
2. Nárys půdorysného stopníku leží na základnici: $P_2^r \in y$.
3. Průsečík nárysných stop je nárys nárysného stopníku průsečnice: $N_2^r = n_2^\rho \cap n_2^\sigma$.
4. Půdorys nárysného stopníku průsečnice leží na základnici: $N_1^r \in y$.
5. Spojením půdorysů stopníků průsečnice získáme půdorys průsečnice: $r_1 = P_1^r N_1^r$.
6. Spojením nárysů stopníků průsečnice získáme nárys průsečnice: $r_2 = P_2^r N_2^r$.



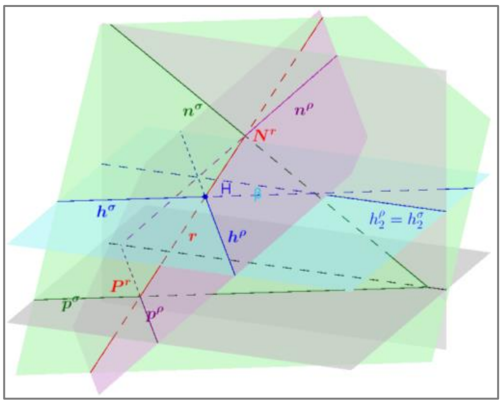
Jsou-li průsečíky stop, nebo alespoň jeden z nich, **nedostupné** na nákresně, pak je nutné sestrojit body průsečnice, které jsou průsečíky průsečnice a roviny rovnoběžné s půdorysnou nebo nárysnou.

Příklad 3.8. Sestrojte průsečnici r dvou rovin ρ a σ (průsečíky stop rovin nejsou dostupné).

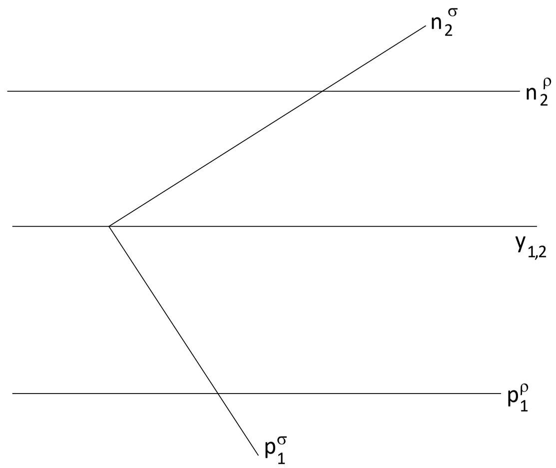


1. Zvolíme libovolnou rovinu rovnoběžnou např. s půdorysnou. Její průsečnice s rovinami zadanými jsou horizontální hlavní přímky těchto rovin.
   V nákresně zvolíme libovolnou rovnoběžku $h_2^\rho = h_2^\sigma$ se základnicí y, která je vlastně horizontálními hlavními přímkami daných rovin.
2. Pomocí stopníků určíme půdorysy těchto horizontálních hlavních přímek:
   $h_1^\rho \parallel p_1^\rho, h_1^\sigma \parallel p_1^\sigma$.
3. Průsečík $H_1 = h_1^\rho \cap h_1^\sigma$ je bod na půdorysu r_1 průsečnice daných rovin.
4. Nárys H_2 leží na přímce $h_2^\rho = h_2^\sigma$.

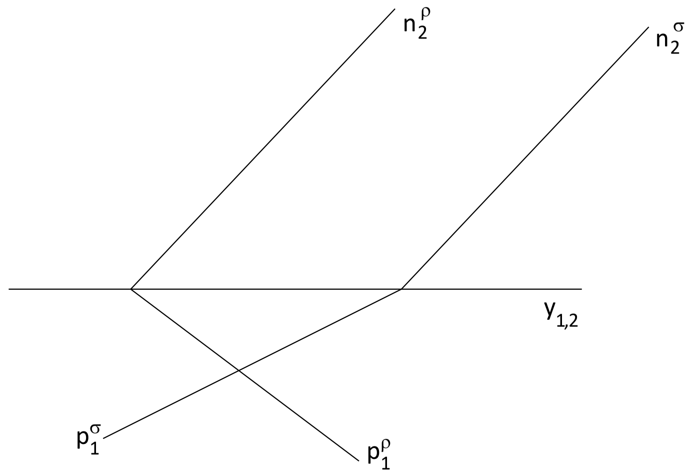
K určení dalšího bodu na průsečnici můžeme tuto konstrukci ještě jednou zopakovat s jinou rovinou rovnoběžnou s π, nebo zvolíme rovinu rovnoběžnou s nárysnou, která protíná dané roviny v jejich frontálních hlavních přímkách. V nákresně zvolíme rovnoběžku se základnicí y: $f_1^\rho = f_1^\sigma \parallel y$, pomocí stopníků určíme jejich nárysy a průsečík F_2 těchto nárysů leží na nárysu průsečnice r_2.



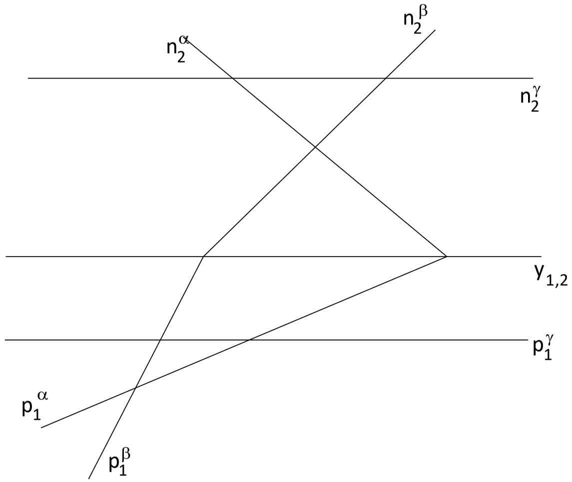
Úloha 3.24. Sestrojte průsečnici rovin ρ a σ (PL 61).



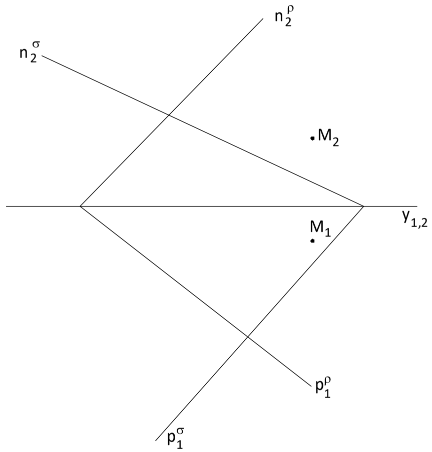
Úloha 3.25. Sestrojte průsečnici rovin ρ a σ (PL 62).



Úloha 3.26. Určete společný bod rovin α, β, γ (PL 66).



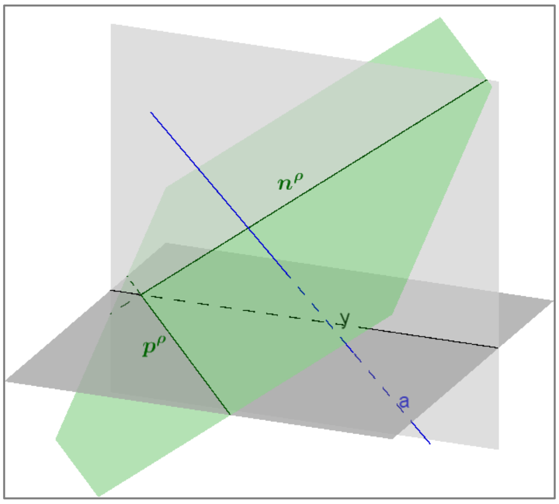
Úloha 3.27. Sestrojte přímku p, která prochází bodem M a je rovnoběžná s rovinami ρ a σ (PL 68).

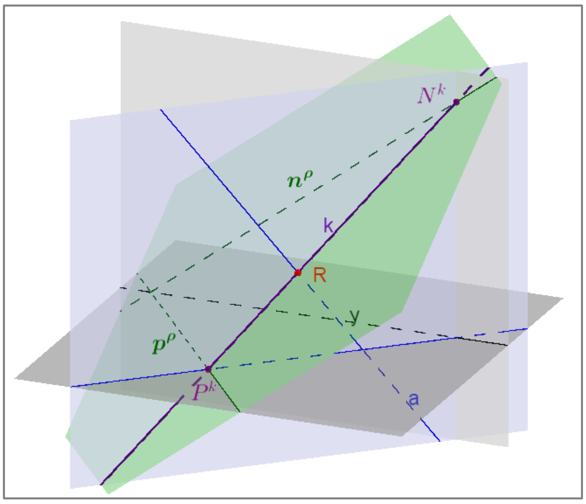


E. PRŮSEČÍK PŘÍMKY S ROVINOU

Hledáme-li průsečík přímky a rovinou v MP používáme tzv. metodu **krycí přímky:**

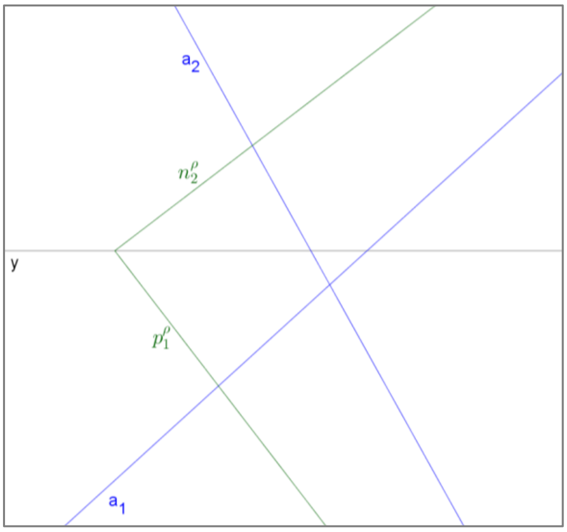
- **krycí přímka** je přímka ležící v dané rovině, jejíž jeden průmět splývá s průmětem přímky dané, to znamená, že mají společnou jednu promítací rovinu,
- průsečík přímky s rovinou je zároveň průsečík krycí přímky a dané přímky.

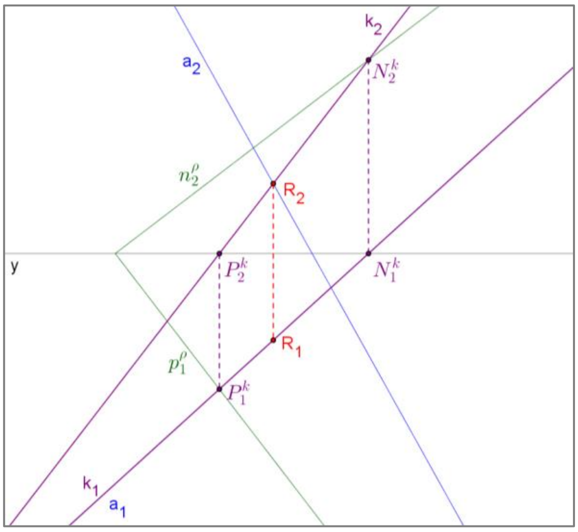




1) Zvolíme jeden průmět krycí přímky (buď půdorys, nebo nárys).
2) Pomocí stopníků (krycí přímka leží v dané rovině, daná přímka nikoliv) určíme chybějící průmět krycí přímky (viz polohová úloha „PŘÍMKA V ROVINĚ“).
3) Tento sestrojený průmět krycí přímky se protne s příslušným průmětem dané přímky v hledaném průsečíku.

Příklad 3.9. Sestrojte průsečík přímky a s rovinou ρ, je-li zadána stopami.

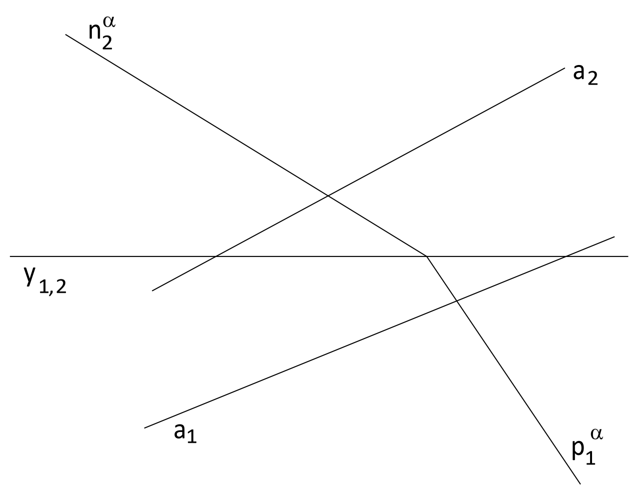




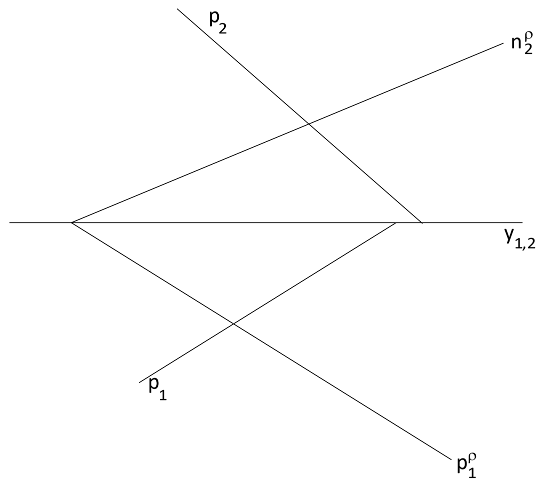
1. Zvolíme průmět krycí přímky k např. v půdorysu $k_1 = a_1$.
2. **Krycí přímka leží v dané rovině** ρ. Určíme půdorysy jejích stopníků: $P_1^k = p_1^\rho \cap k_1, N_1^k = k_1 \cap y$.
3. Sestrojíme nárysy těchto stopníků: $P_2^k \in y, N_2^k \in n_2^\rho$.
4. Spojením nárysných stopníků P_2^k, N_2^k získáme nárys krycí přímky $k_2 = P_2^k N_2^k$.
5. Průsečík přímky a a krycí přímky k: $a_2 \cap k_2 = R_2$.
6. Půdorys R_1leží na půdorysu přímky a_1.

Pozn.: Při volbě krycí přímky v nárysе ($a_2 = k_2$), hledáme půdorys krycí přímky k_1. Na výsledný průsečík volba krycí přímky v půdorysu nebo nárysu nemá žádný vliv

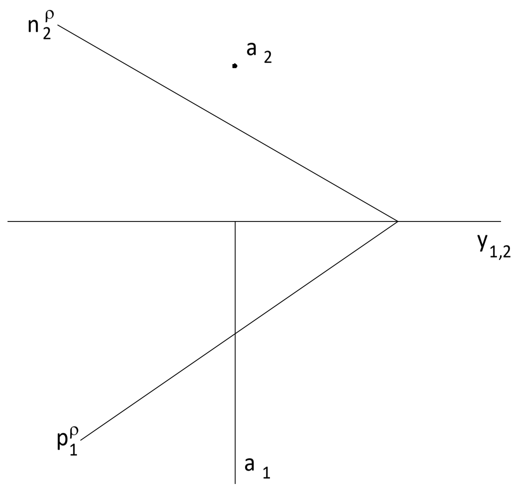
Úloha 3.28. Určete průsečík přímky a s rovinou α (PL 53).



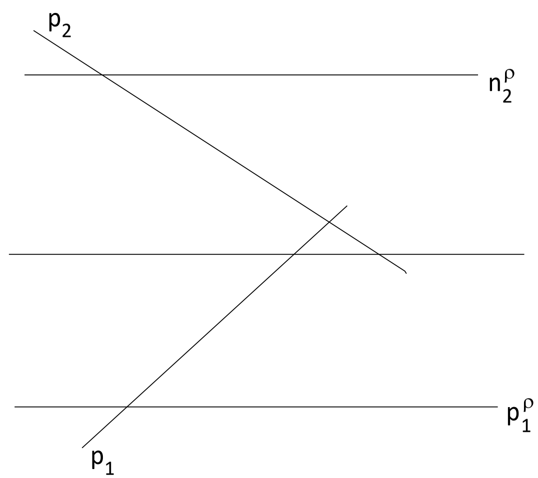
Úloha 3.29. Sestrojte průsečík přímky p a roviny ρ(PL 48).



Úloha 3.30. Určete průsečík R přímky a s rovinou ρ(PL 51).



Úloha 3.31. Sestrojte průsečík přímky p s rovinou ρ(PL 49).

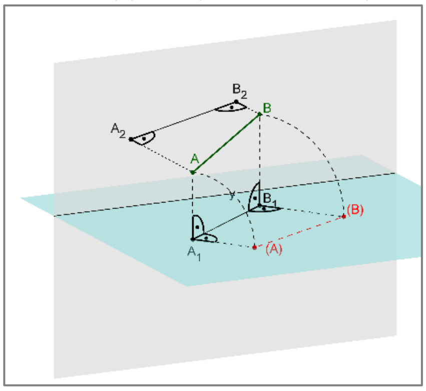


3.7 METRICKÉ ÚLOHY

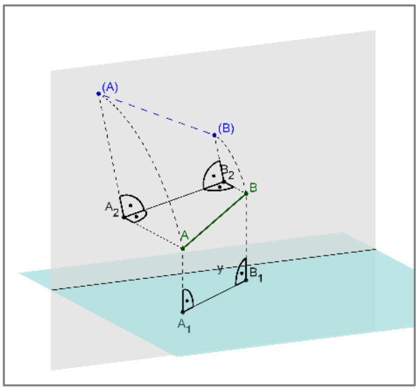
A. SKUTEČNÁ VELIKOST ÚSEČKY

Protože se délky všech úseček při zobrazování v MP zkreslí, používáme k určování (nanášení) skutečné délky tzv. **sklápění úsečky**.

Sklápění úsečky je otáčení (půdorysně nebo nárysně) promítací roviny (= roviny kolmé k průmětně) této úsečky do této průmětny kolem stopy této promítací roviny.



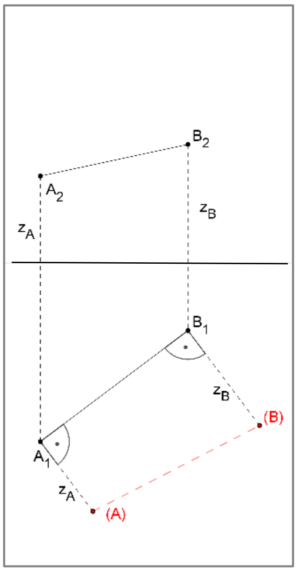
Sklápění do půdorysny



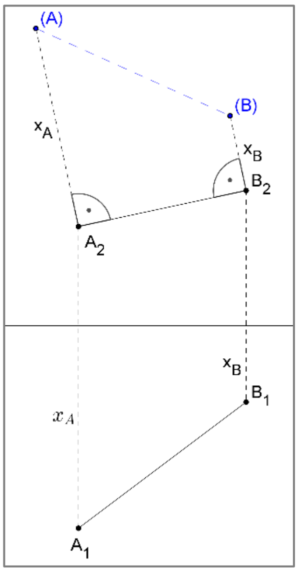
Sklápění do nárysny

Postup konstrukce:

1) Nejprve sestrojíme kolmice v koncových bodech některého průmětu úsečky.
2) Na tuto kolmici pak naneseme souřadnici druhého průmětu tohoto bodu (sklápíme-li v půdorysu, nanášíme z-ovou souřadnici, sklápíme-li v nárysu, nanášíme souřadnici x-ovou).
3) Tím získáme sklopené body, které značíme závorkou např. (A).
4) Vzdálenost sklopených koncových bodů úsečky je skutečnou délkou úsečky.
5) Sklopená úsečka (přímka) se značí čárkovaně.

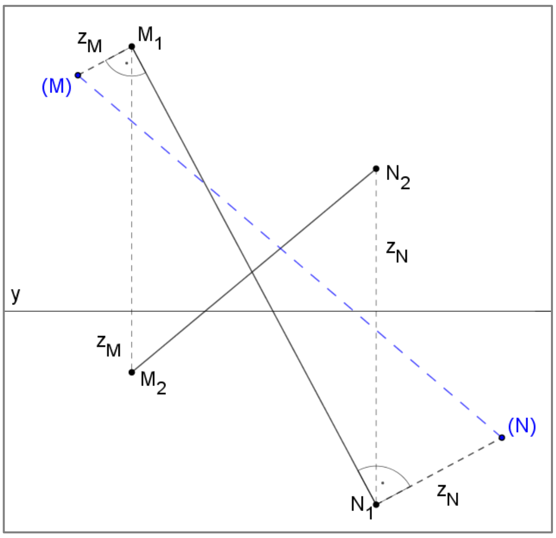


Sklápění do půdorysny

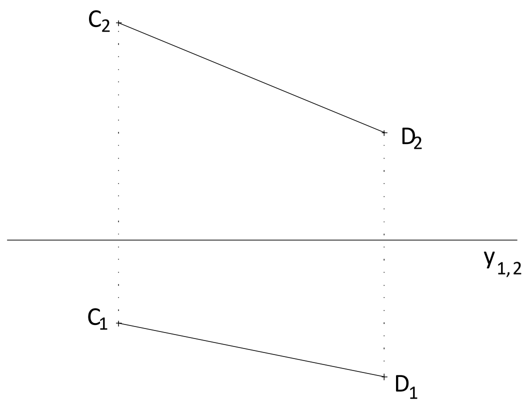


Sklápění do nárysny

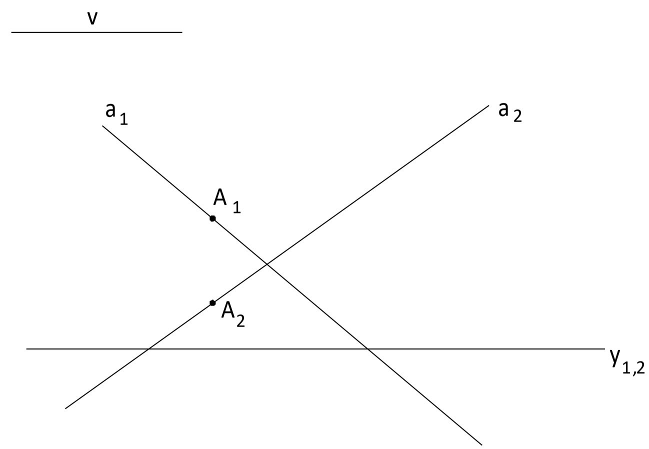
Pozn.: Pokud je nanášená souřadnice jednoho koncového bodu kladná a druhého koncového bodu záporná, je nutné tyto souřadnice nanášet na kolmice v opačných polorovinách určených průmětem úsečky.



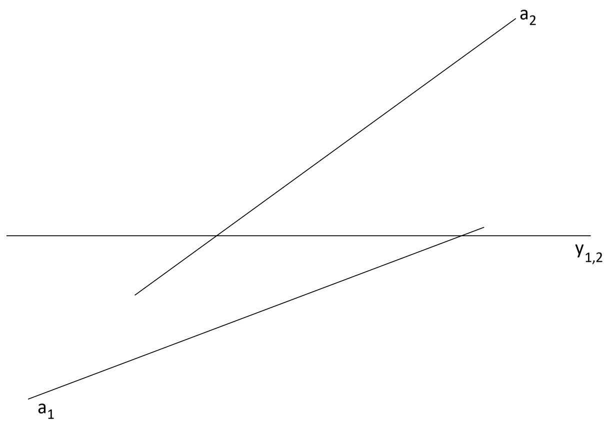
Úloha 3.32. Určete skutečnou velikost úsečky CD (PL 78).



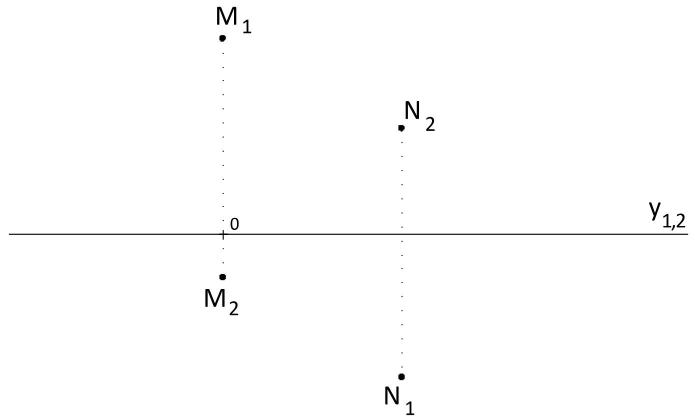
Úloha 3.33. Na přímce a zobrazte bod B, který má od bodu A vzdálenost v (PL 79).



Úloha 3.34. Na přímce a sestrojte bod, který má od jejího půdorysného stopníku vzdálenost 2 (PL 80).



Úloha 3.35. Je dána přímka MN. Naneste na ni od bodu N vzdálenost 3. Určete souřadnice tohoto bodu X, pokud $z_X < z_N$ (PL 81).

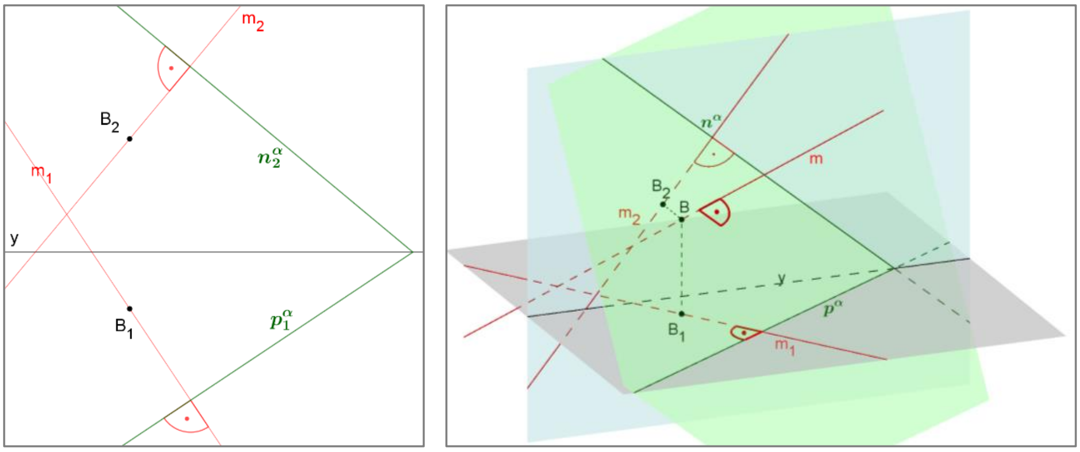


B. PŘÍMKA KOLMÁ K ROVINĚ

Věta 3.2: Přímka je kolmá k rovině, která není rovnoběžná se základnicí, právě tehdy, když její první průmět je kolmý na první průmět její horizontální hlavní přímky (na půdorysnou stopu) a zároveň, když její druhý průmět je kolmý na druhý průmět její frontální hlavní přímky (na nárysnou stopu).

Příklad 3.10. Sestrojte kolmici m k rovině α daným bodem B.

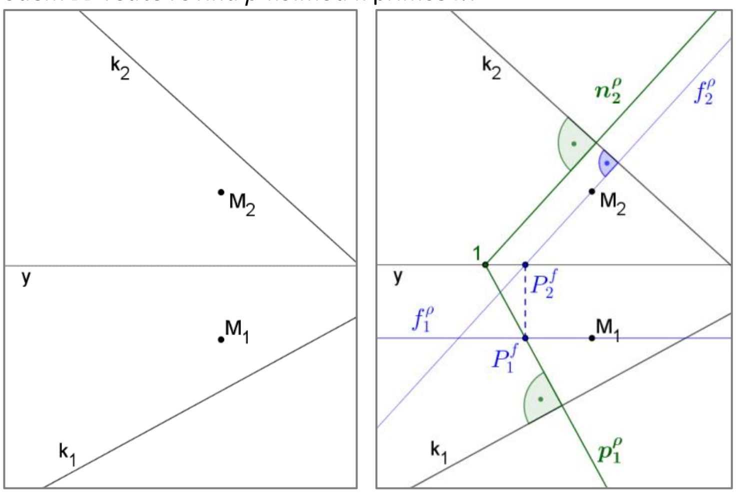
1. Půdorys kolmice m_1 je kolmý na půdorysnou stopu p_1^α roviny α a prochází bodem B_1.
2. Nárys kolmice m_2 je kolmý na nárysnou stopu n_2^α roviny α a prochází bodem B_2.



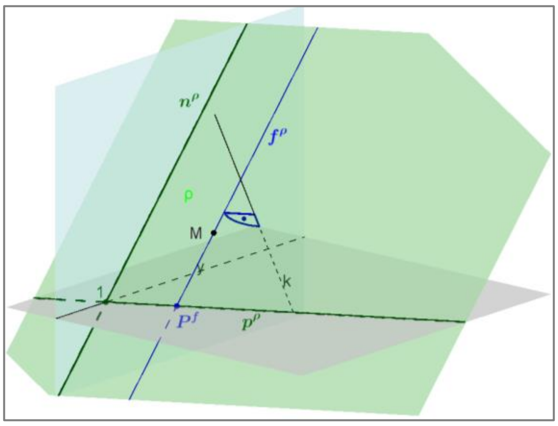
C. ROVINA KOLMÁ K PŘÍMCE

- půdorys horizontální hlavní přímky hledané roviny je kolmý na půdorys zadané přímky a její nárys je rovnoběžný se základnicí,
- půdorys frontální hlavní přímky hledané roviny je rovnoběžný se základnicí a nárys je kolmý na nárys dané přímky.

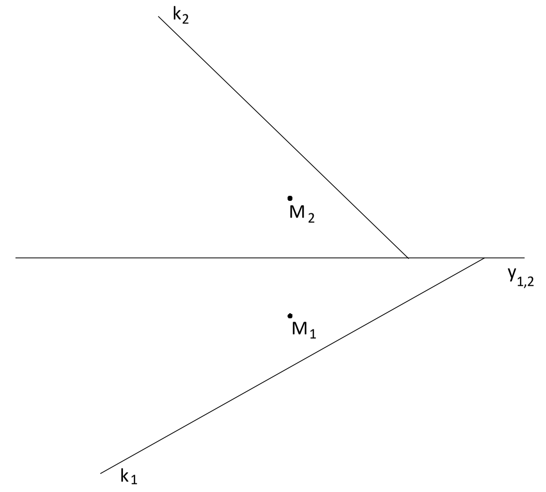
Příklad 3.11. Daným bodem M veďte rovinu ρ kolmou k přímce k.



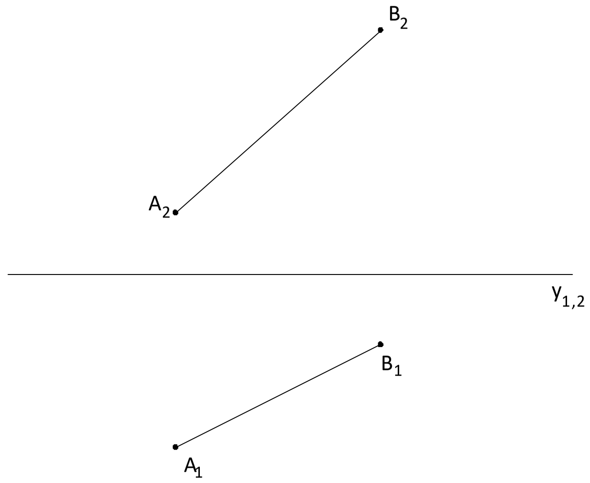
1. Daným bodem M vedeme (horizontální nebo frontální) hlavní přímku hledané roviny:
$f_1^\rho \parallel y \wedge M_1 \in f_1^\rho, f_2^\rho \perp k_2 \wedge M_2 \in f_2^\rho$.
2. Určíme stopník této hlavní přímky:
$f_2^\rho \cap y = P_2^f \Rightarrow P_1^f \in f_1^\rho$.
3. Protože hlavní přímka leží v hledané rovině, musí stopa roviny procházet stopníkem hlavní přímky: $P_1^f \in p_1^\rho \wedge p_1^\rho \perp k_1$ (přímka k je kolmá k hledané rovině ρ).
4. Chybějící nárysnou stopu vedeme průsečíkem půdorysné stopy a základnice kolmo k nárysu přímky k_2 (přímka k je kolmá k hledané rovině ρ).



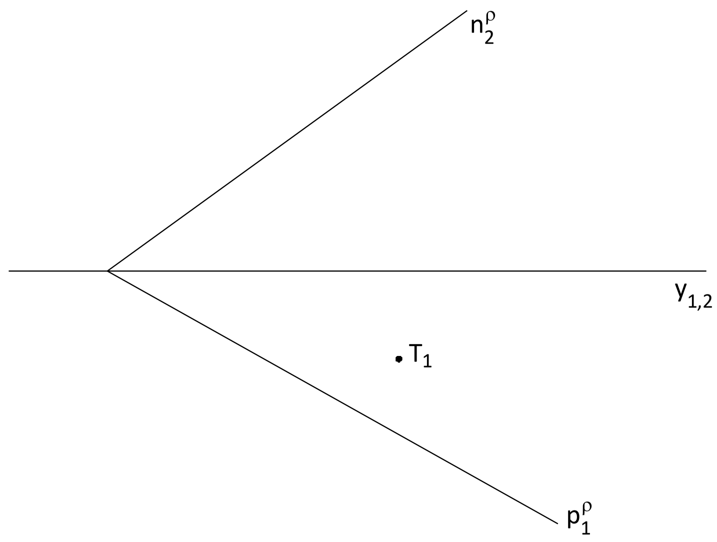
Úloha 3.36. Bodem M veďte rovinu ρ kolmou k přímce k (PL 88).



Úloha 3.37. Zobrazte rovinu souměrnosti σúsečky AB (PL 89).



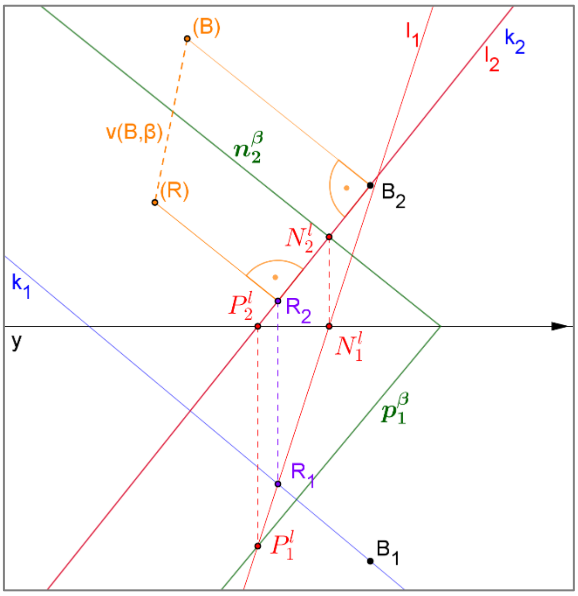
Úloha 3.38. V bodě T roviny ρ vztyčte kolmici k této rovině a určete na ní bod X tak, aby $|XT| = 2$ a $x_X > x_T$ (PL 85).

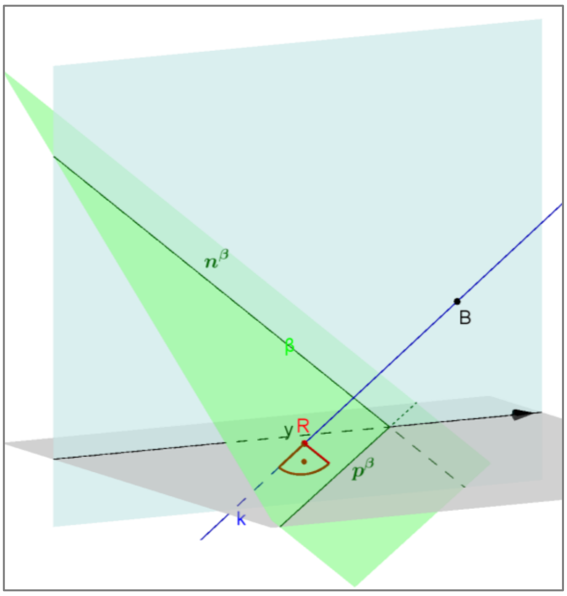


D. VZDÁLENOST BODU OD ROVINY

Tato úloha je složena ze tří jednodušších úloh:

1) kolmice z daného bodu k rovině,
2) průsečík této kolmice s danou rovinou,
3) určení skutečné vzdálenosti průsečíku a daného bodu.

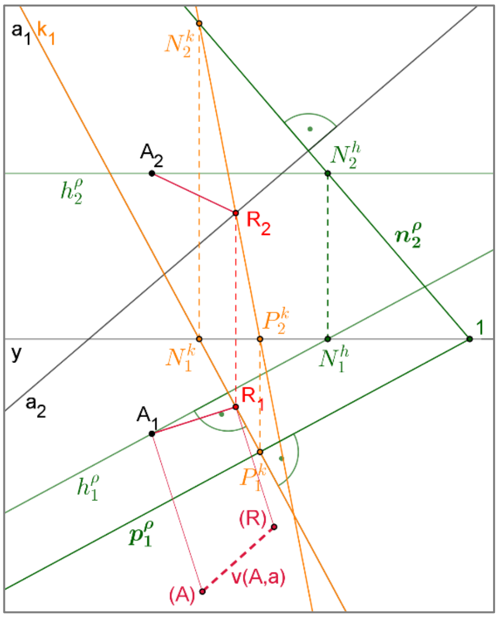


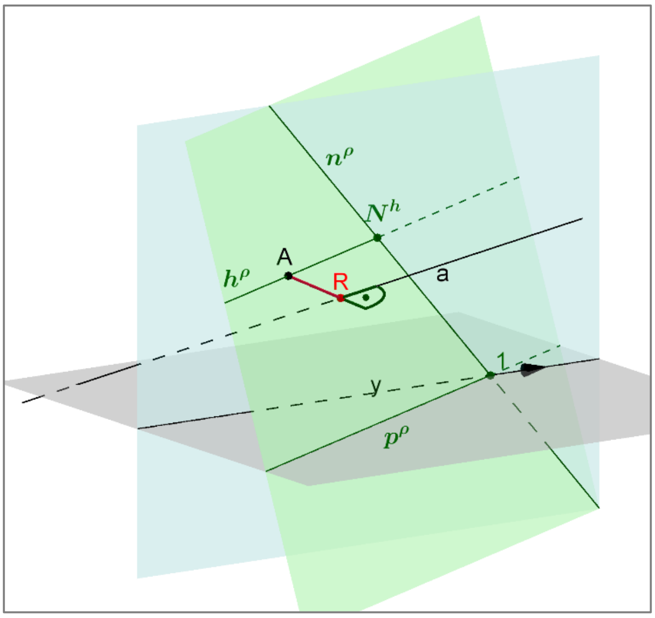


E. VZDÁLENOST BODU OD PŘÍMKY

Úloha je složena ze tří podúloh:

1) sestrojení roviny kolmé daným bodem k dané přímce,
2) určení průsečíku této kolmé roviny a dané přímky,
3) určení skutečné vzdálenosti průsečíku a daného bodu.

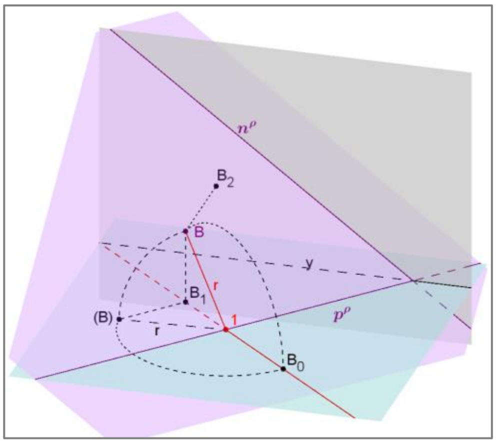




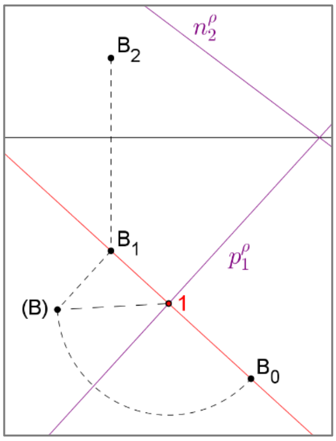
Úloha 3.39. Určete vzdálenost bodu $A[2; -3; 3{,}5]$ od přímky $a = BC$ ($B[0; -2; 2]$, $C[6{,}5; 1{,}5; 5]$) (PL 97).

Úloha 3.40. Určete vzdálenost bodu $B[5; 1; 3]$ od roviny $\beta = (3; 2{,}5; 2)$ (PL 96).

F. OTÁČENÍ ROVINY KOLEM STOPY DO PRŮMĚTNY



- Slouží k sestrojení rovinných obrazců ležících v rovině, protože průměty obrazců jsou v MP zkreslené.
- Otáčení celé roviny provádíme pomocí otáčení libovolného bodu v rovině.
- Osou otáčení je stopa roviny, středem otáčení je průsečík stopy a spádové přímky, která prochází otáčeným bodem.
- Poloměr otáčení r je vzdálenost středu otáčení a otáčeného bodu B.
- Poloměr otáčení r je v MP zkreslený, proto je nutné zjistit jeho skutečnou délku pomocí sklápění.



Otáčení roviny pomocí bodu B do půdorysny:

1) Protože otáčíme do π, z bodu B_1 vedeme kolmici k půdorysné stopě.
2) Kolmice protne p_1^ρ v bodě 1 (střed otáčení).
3) Vzdálenost bodu B_1 od p_1^ρ je zkrácený poloměr otáčení, ke zjištění jeho skutečné délky jej sklopíme: v B_1 sestrojíme kolmici k $B_1 1$ a naneseme na ni z_B, tím získáme (B), bod 1 leží na p_1^ρ, proto je jeho z-ová souřadnice nulová, $|(B)1| = r$ je délka poloměru otáčení.
4) Určení otočeného bodu B_0: $|(B)1| = r = |B_0 1|$, B_0 leží na kolmici k p_1^ρ v bodě B_1.

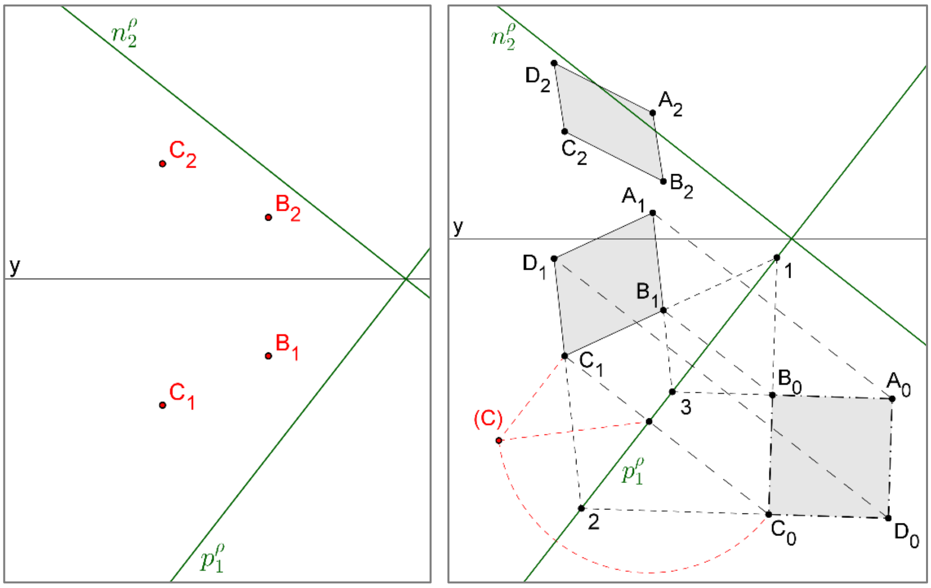
Obdobně se otáčí rovina pomocí bodu do nárysny kolem nárysné stopy.

Mezi průmětem bodu (půdorysem nebo nárysem, podle toho do jaké průmětny otáčíme) a body otočenými existuje zobrazení tzv. **osová afinita v rovině**.

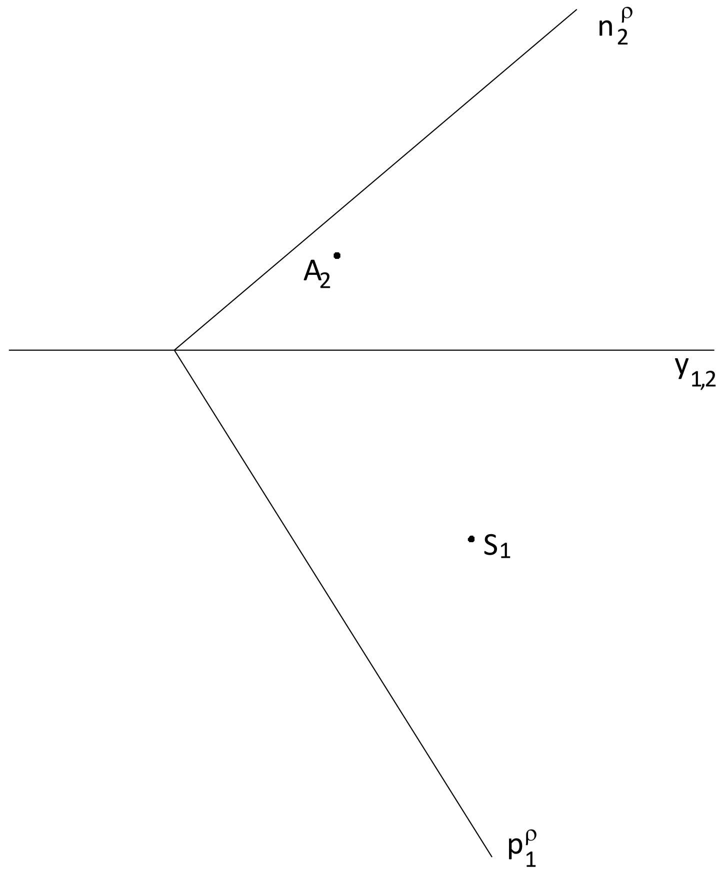
- Osovou afinitu využíváme k určení otočených bodů pomocí již známých otočených bodů a k získání průmětů bodů, pokud známe jejich otočené obrazy.
- Přímky, které si odpovídají v osové afinitě, se protínají na stopě roviny, kolem které se rovina otáčí.

Příklad 3.12. Sestrojte čtverec $ABCD$ v dané rovině ρ, jsou-li dány vrcholy B, C čtverce.

1. Otočíme rovinu čtverce do půdorysny pomocí bodu C (viz výše). Získáme C_0.
2. Určíme pomocí afinity otočený bod B_0 $(C_1B_1 \cap p_1^\rho = 1, B_0 \in 1C_0 \wedge B_0B_1 \perp p_1^\rho)$.
3. Sestrojíme v otočení čtverec $A_0B_0C_0D_0$ (strany čerchovaně).
4. Pomocí afinity určíme bod A_1: $A_0B_0 \cap p_1^\rho = 3, A_1 \in 3B_1 \wedge A_0A_1 \perp p_1^\rho$.
5. Obdobně sestrojíme D_1: $D_0C_0 \cap p_1^\rho = 2, D_1 \in 2C_1 \wedge D_0D_1 \perp p_1^\rho$.
6. Pomocí hlavních přímek získáme nárys čtverce $A_2B_2C_2D_2$ (hl. přímky nejsou v obrázku znázorněny).



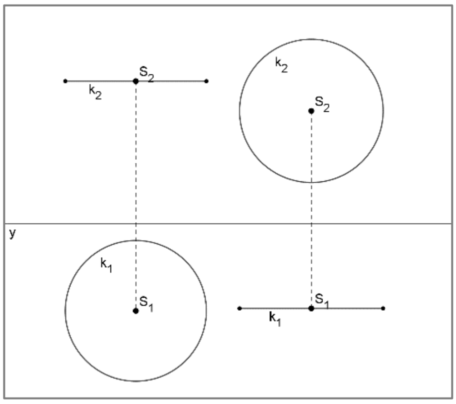
Úloha 3.41. V rovině ρ jsou dány body S, A. Zobrazte čtverec, který má střed S a vrchol A (PL 104).



Úloha 3.42. Najděte ortocentrum trojúhelníka ABC ($A[2{,}5;\ 2{,}5;\ 4]$, $B[1;\ -1;\ 2]$, $C[6;\ 1{,}5;\ 1]$) (PL 107).

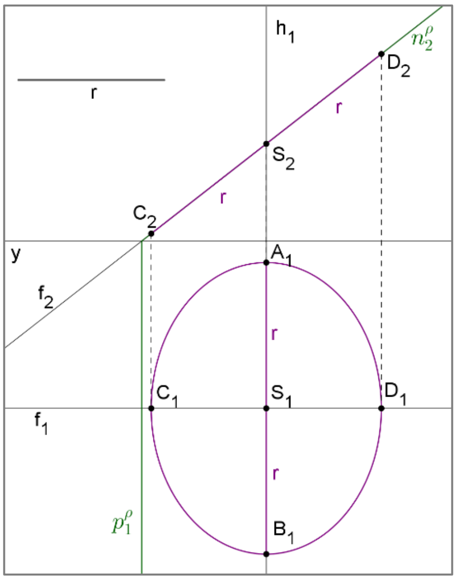
3.8 OBRAZ KRUŽNICE

Věta 3.3: Poloměr kružnice $k(S, r)$ se v Mongeově promítání zachová na hlavní přímce rovnoběžné se stopou roviny, která prochází středem kružnice.



1. Je-li **rovina kružnice rovnoběžná s jednou průmětnou**, pak sdruženými průměty kružnice jsou **kružnice** a **úsečka** délky $2r$ rovnoběžná se základnicí.

2. Je-li **rovina kružnice kolmá k průmětně** pak sdruženými průměty kružnice, jsou **úsečka** (na stopě roviny) délky $2r$ a **elipsa**.
   - Je-li rovina kružnice kolmá k nárysně, pak cokoliv v rovině leží, zobrazí se do nárysné stopy roviny, tedy kružnice se zobrazí do úsečky C_2D_2 (nárysná stopa je zároveň frontální hlavní přímka f_2 roviny procházející bodem S_2) délky $2r$.
   - Půdorysem je elipsa, jejíž hlavní osa je délky $2r$ a je rovnoběžná s půdorysnou stopou (získáme tak hlavní vrcholy A_1, B_1 elipsy v půdorysu).
   - Vedlejší vrcholy C_1, D_1 leží na ordinálách z bodů C_2, D_2 a na $f_1 \parallel y$.

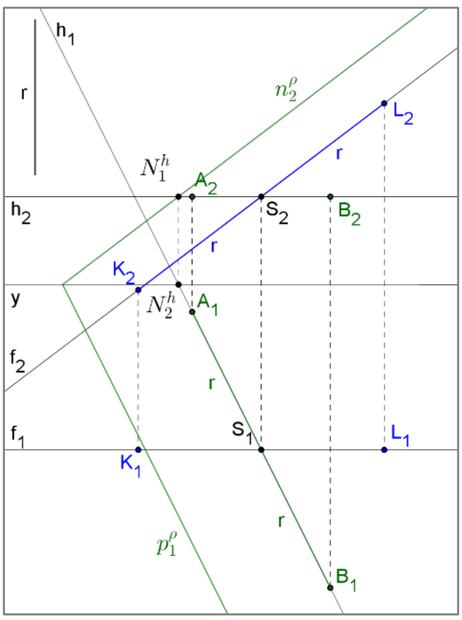


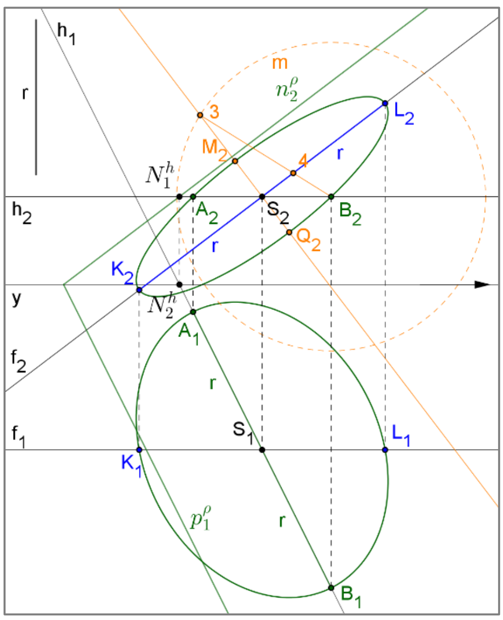
3. Je-li **rovina kružnice obecná,** pak sdruženými průměty kružnice jsou různé elipsy.

Známe-li délku poloměru a střed kružnice, můžeme použít k její konstrukci výše zmíněnou větu 3.3:

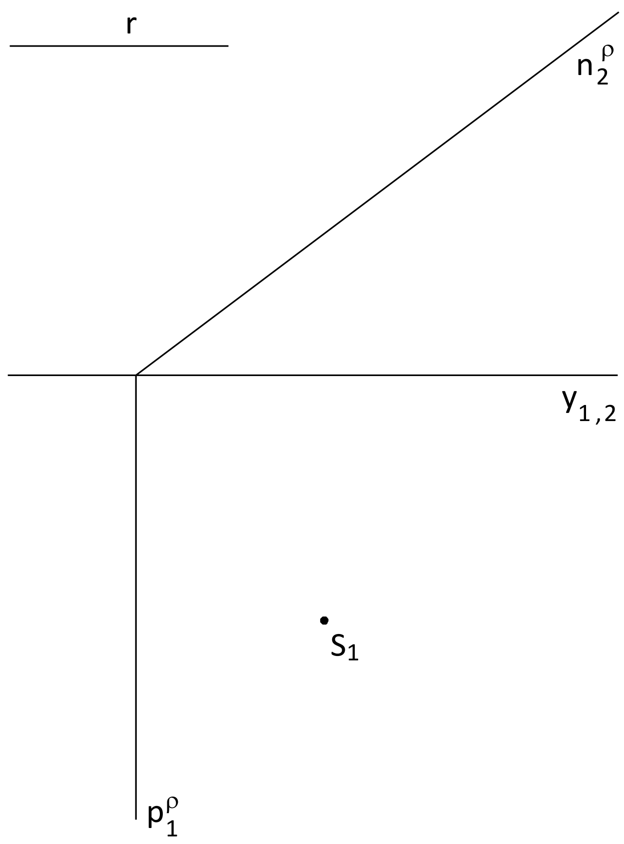
- V půdorysu se délka poloměru r kružnice zachová na horizontální hl. přímce h_1 procházející bodem S_1. Půdorysy A_1, B_1 jsou hlavní vrcholy elipsy v půdorysu $|A_1S_1| = |B_1S_1| = r$.
- V nárysu se délka poloměru zachová na frontální hl. přímce f_2 procházející bodem S_2. Nárysy K_2, L_2 jsou hlavní vrcholy elipsy v nárysе $|K_2S_2| = |L_2S_2| = r$.
- Nárysy A_2, B_2 ležící na přímce $h_2 \parallel y$ jsou obecnými body elipsy v nárysе. K sestrojení vedlejších vrcholů elipsy v nárysе můžeme použít proužkovou konstrukci elipsy.
- Půdorysy K_1, L_1 ležící na přímce $f_1 \parallel y$ jsou obecnými body elipsy v půdorysе. K sestrojení vedlejších vrcholů elipsy v půdorysе můžeme použít proužkovou konstrukci elipsy.

Pozn.: Protože je kružnice rovinný útvar můžeme k její konstrukci použít také otáčení roviny, ve které leží.

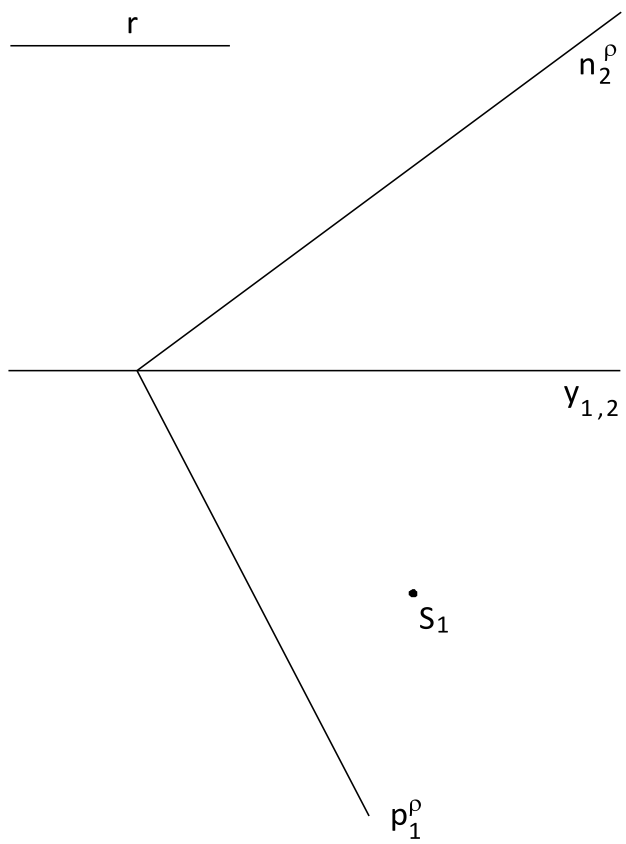




Úloha 3.43. Zobrazte kružnici, je-li dána její rovina ρ, střed S a poloměr r (PL 115).



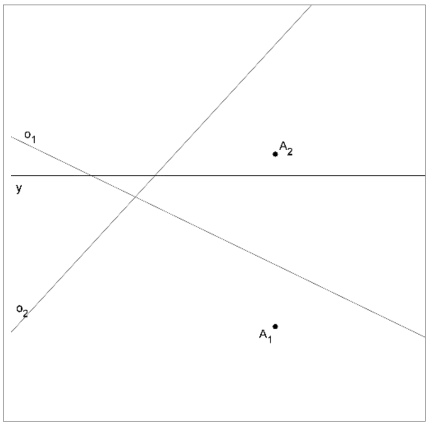
Úloha 3.44. Zobrazte kružnici, je-li dána její rovina ρ, střed S a poloměr r (PL 116).

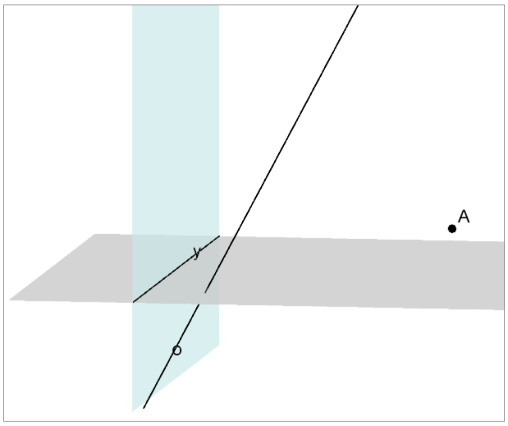


3.9 ZOBRAZENÍ TĚLES A PLOCH

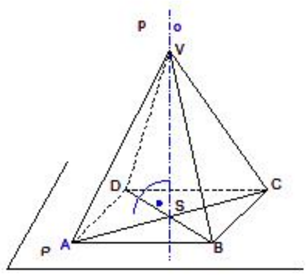
Při konstrukci těles (ploch) v MP nejdříve určíme prostorové řešení úlohy, např. pomocí náčrtku a poté jednotlivé kroky, tedy dílčí konstrukce, v MP sestrojíme.

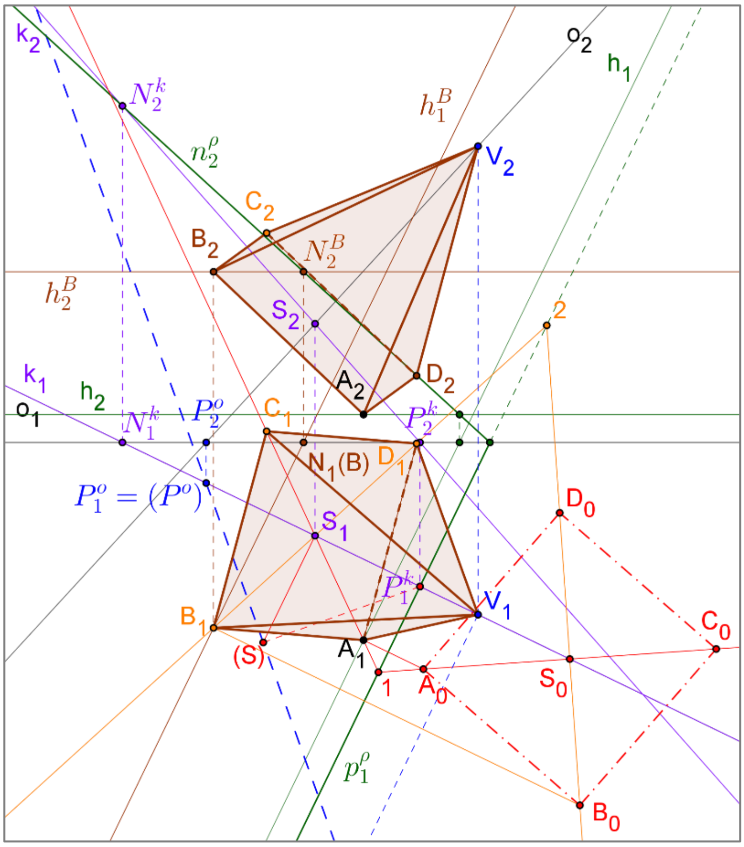
Příklad 3.13. Je dána přímka o a bod A. Zobrazte pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ s osou o, výškou 5 a vrcholem podstavy A. Volte vrchol V tak, aby jeho z-ová souřadnice byla větší než z-ová souřadnice bodu A.

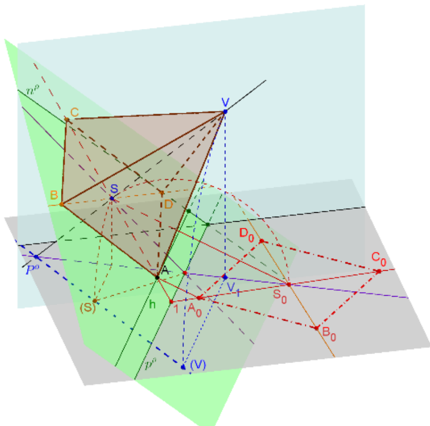




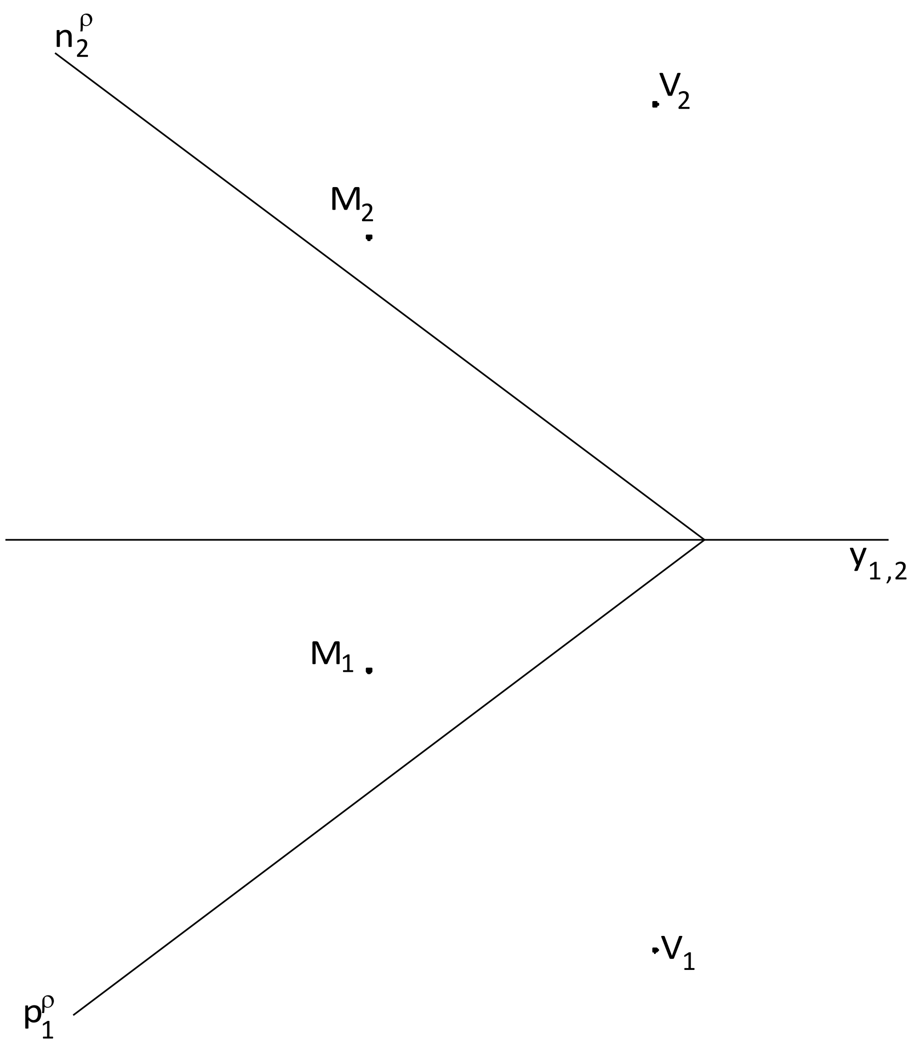
1. Sestrojíme rovinu podstavy $\rho; \rho \perp o \wedge A \in \rho$ pomocí metrické úlohy „rovina kolmá k přímce“.
2. Určíme střed podstavy $S; S = o \cap \rho$ užitím polohové úlohy „průsečík přímky s rovinou“.
3. Sestrojíme podstavu jehlanu, kterou je čtverec $ABCD$; $ABCD \subset \rho$, se středem S pomocí úlohy „otáčení roviny“.
4. Sestrojení vrcholu $V; V \in o \wedge |SV| = 5$ díky metrické úloze „skutečná délka úsečky“ užitím sklápění úsečky/přímky.
5. Jehlan $ABCDV$.







Úloha 3.45. Sestrojte pravidelný čtyřboký jehlan, je-li dán vrchol V, rovina podstavy ρ a bod M pobočné hrany (PL 122).



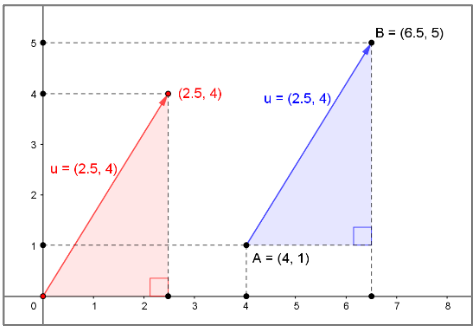
4. ANALYTICKÁ GEOMETRIE V ROVINĚ

4.1 VEKTOR

Bod v rovině je popsán ***dvěma souřadnicemi*** v kartézské soustavě souřadnic $A[a_1, a_2]$:

- a_1 (první souřadnice) značí posunutí bodu ve směru souřadnicové osy x,
- a_2 (druhá souřadnice) značí posunutí bodu ve směru souřadnicové osy y.

Vektor je množina všech souhlasně orientovaných úseček téže velikosti.



Každý vektor je určen **počátečním** a **koncovým** bodem, např. $\vec{u} = AB$ (vektor $\vec{u}$ je určen počátečním bodem A a koncovým bodem B).

Souřadnice vektoru $\vec{u} = AB$ vypočítáme jako rozdíl souřadnic bodů $B - A$. Je-li $A[a_1, a_2], B[b_1, b_2]$ má vektor $\vec{u}$ souřadnice:

$$\vec{u} = (u_1, u_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2).$$

Vlastnosti vektorů:

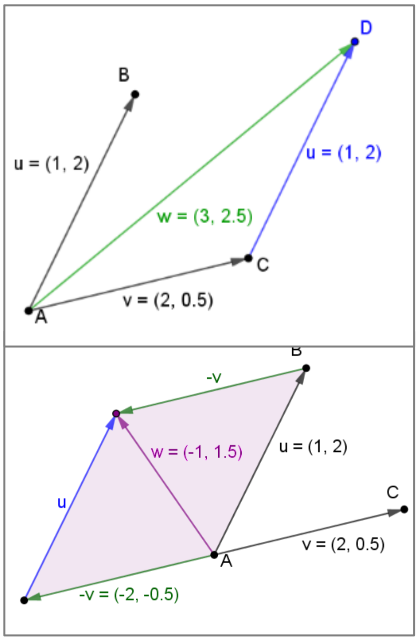
1) **Velikost vektoru** $\vec{u} = AB, A[a_1, a_2], B[b_1, b_2]$:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}\,.$$

Pozn.: velikost úsečky AB či vzdálenost bodů A, B se určuje stejně jako velikost vektoru AB.

2) **Jednotkový vektor** $\vec{v}$ k vektoru $\vec{u} = AB, A[a_1, a_2], B[b_1, b_2]$ je vektor stejného směru jako vektor $\vec{u}$, ale s velikostí 1.

$$\vec{v} = \frac{(u_1, u_2)}{|\vec{u}|} = \left(\frac{u_1}{|\vec{u}|}, \frac{u_2}{|\vec{u}|}\right), |\vec{v}| = 1$$



3) **Součet vektorů** $\vec{v} + \vec{u} = \vec{w}$:

$$\vec{w} = (v_1 + u_1, v_2 + u_2)$$

Sčítání vektorů **graficky**: do koncového bodu vektoru $\vec{v}$ umístíme počáteční bod vektoru $\vec{u}$. Součet $\vec{w}$ má pak počáteční bod v počátečním bodě vektoru $\vec{v}$ a koncový bod v koncovém bodě vektoru $\vec{u}$.

4) **Opačný vektor** k vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2)$:

$$-\vec{u} = (-u_1, -u_2).$$

5) **Rozdíl vektorů** $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (\overrightarrow{-v}) = \vec{w}$:

$$\vec{w} = \big(u_1 + (-v_1), u_2 + (-v_2)\big).$$

6) **k-násobek vektoru** $\vec{u} = (u_1, u_2)$:

$$k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_1, k \cdot u_2);\ k \in \mathbb{R} - \{0\},$$

pro $k = 0$ je vektor $k \cdot \vec{u}$ nulový vektor $0 \cdot \vec{u} = \vec{o} = (0,0)$.

7) **Skalární součin** vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2)$: $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$

8) **Odchylka** φ vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2)$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}, \varphi \in \langle 0°, 180° \rangle.$$

9) **Kolmost vektorů** $\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2)$:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Pozn.: V rovině lze k vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2)$ jednoduše určit kolmý vektor $\vec{v}$ tak, že přehodíme souřadnice vektoru $\vec{u}$ a u jedné souřadnice změníme znaménko např. $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{v} = (-u_2, u_1)$ nebo $\vec{v} = (u_2, -u_1)$.

Příklad 4.1. Určete souřadnice vektoru $\vec{u} = AB$, jsou-li dány body A, B:

a) $A[2,1], B[-2,3]$; $[\vec{u} = (-4; 2)]$

b) $A[0,-2], B[0,-2]$; $[\vec{u} = (0; 0)]$

Řešení:

a) $\vec{u} = (u_1, u_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (-2 - 2; 3 - 1) = (-4; 2)$

b) $\vec{u} = (u_1, u_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = \big(0 - 0; -2 - (-2)\big) = (0; 0)$

Úloha 4.1. Vektor $\vec{s} = PQ, P[5,-2], Q[10,3]$. Vypočítejte souřadnice bodu A tak, aby orientovaná úsečka KA ($K[0,-2]$) také určovala vektor $\vec{s}$. $\big[A[5,3]\big]$

Úloha 4.2. Vektor $\vec{v} = (3; 2)$ umístíme počátečním bodem do bodu $A[8; 4]$. Určete souřadnice koncového bodu vektoru. $\big[B[11; 6]\big]$

Úloha 4.3. Vektor $\vec{v} = (1; -2)$ umístíme koncovým bodem do bodu $B[10; 5]$. Určete souřadnice koncového bodu vektoru. $\big[A[9; 7]\big]$

Úloha 4.4. Jsou dány body $R[3; -2], S[-4; 5], T[2; 1]$. Vypočítejte souřadnice bodu X tak, aby:

a) čtyřúhelník $\boldsymbol{RSTX}$ byl rovnoběžník, $\big[X[9; -6]\big]$

b) čtyřúhelník $\boldsymbol{RSXT}$ byl rovnoběžník, $\big[X[-5; 8]\big]$

c) čtyřúhelník $\boldsymbol{RXST}$ byl rovnoběžník. $\big[X[-3; 2]\big]$

Příklad 4.2. Určete velikost vektoru $\vec{u} = (1; -2)$. $[\sqrt{5}]$

Řešení:

$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

Úloha 4.5. Určete velikosti vektorů $\vec{v} = (6; 9), \vec{w} = (4; 3)$. $[\sqrt{117}, 5]$

Úloha 4.6. Trojúhelník s vrcholy $A[17; 2], B[9; 6], C[2; -18]$ je rovnoramenný. Určete, které strany jsou jeho ramena. $[ramena\ AC, BC, délka\ 25]$

Úloha 4.7. Vypočtěte velikost vektoru s počátečním bodem $S[2; 4]$ a koncovým bodem:

a) $A[-1; -1]$, $[\sqrt{34}]$

b) $B[-3; 16]$, $[13]$

c) $C[0; -7]$, $[5\sqrt{5}]$

d) $O[0; 0]$. $[2\sqrt{5}]$

Úloha 4.8. Určete délky stran trojúhelníku s vrcholy $A[7,2], B[9,6], C[4,12]$. Určete jeho obsah. $[délky\ stran\ 3; 4; 5; obsah\ 6]$

Úloha 4.9. Který násobek vektoru $\vec{u} = (-3; 4)$ má délku 15? $[trojnásobek]$

Příklad 4.3. Vypočtěte skalární součin vektorů:

a) $\vec{u} = (1; 2), \vec{v} = (3; 2)$, $[7]$

b) $\vec{u} = (0; 1), \vec{v} = (1; -1)$, $[-1]$

Řešení:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 7$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = -1$

Úloha 4.10. Vypočtěte skalární součin vektorů:

a) $\vec{u} = (2; -1), \vec{v} = (-1; 1)$, $[-3]$

b) $\vec{u} = (3; 8), \vec{v} = (-2; -3)$, $[-30]$

c) $\vec{u} = (1; 2), \vec{v} = (5; -1)$, $[3]$

d) $\vec{u} = (3; 0), \vec{v} = (2; 0)$. $[0]$

Příklad 4.4. Vypočtěte odchylky, které spolu svírají vektory AB, CD: $A[2; 1]$, $B[3; 3]$, $C[2; 8]$, $D[5; 12]$ $[10°18']$

Řešení:

$$\overrightarrow{AB} = (3-2; 3-1) = (1; 2)$$
$$\overrightarrow{CD} = (5-2; 12-8) = (3; 4)$$
$$cos\,\varphi = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|} = \frac{1\cdot 3+2\cdot 4}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{11}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{25}} = \frac{11}{\sqrt{5}\cdot 5} \Rightarrow \varphi \doteq 10°18'$$

Úloha 4.11. Je dán trojúhelník ABC $(A[2; 3], B[3; 1], C[5; 2])$. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů v tomto trojúhelníku. $[45°, 90°, 45°]$

Úloha 4.12. Je dán vektor $\vec{x} = (-1; 2)$. Určete $p \in \mathbb{R}$ tak, aby vektor $\vec{y} = (16; p)$ byl kolmý k vektoru $\vec{x}$. $[p = 8]$

Úloha 4.13. Je dán vektor $\vec{a} = (2; -3)$.

a) určete alespoň jeden vektor $\vec{b}$, který je kolmý k vektoru $\vec{a}$, $[např. (3; 2)]$

b) určete všechny vektory $\vec{c}$, které jsou kolmé k vektoru $\vec{a}$ a mají stejnou velikost jako vektor $\vec{a}$, $[(3; 2), (-3; -2)]$

c) určete všechny vektory $\vec{d}_k$, které jsou k vektoru $\vec{a}$ kolmé. $[\vec{d}_k = (2k; -3k), k \in \mathbb{R} - \{0\}]$

Úloha 4.14. Jsou dány body $A[-2; 4], C[8; 5]$. Určete souřadnice bodů B, D tak, aby $ABCD$ byl čtverec. $\left[D\left[\frac{5}{2}; \frac{19}{2}\right], B\left[\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right]\right]$

Úloha 4.15. Jsou dány body $M\left[3; -2\sqrt{2}\right], N\left[-1; 2\sqrt{2}\right]$. Určete souřadnice bodu *O* tak, aby trojúhelník *MNO* byl pravoúhlý rovnoramenný, s pravým úhlem u vrcholu:

a) M, $\left[O_{1,2}\left[3 \pm 4\sqrt{2}; \pm 4 - 2\sqrt{2}\right]\right]$

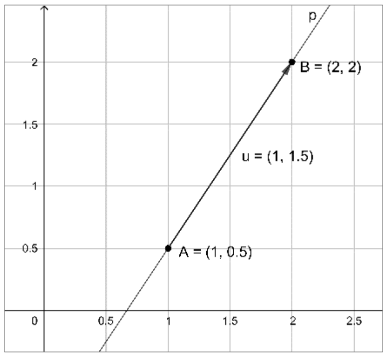
b) N, $\left[O_{1,2}\left[\pm 4\sqrt{2} - 1; \pm 4 + 2\sqrt{2}\right]\right]$

c) O. $\left[O_{1,2}\left[1 \pm 2\sqrt{2}; \pm 2\right]\right]$

4.2 PŘÍMKA

1) **Parametrická rovnice přímky**

$$p: x = a_1 + t \cdot u_1$$
$$y = a_2 + t \cdot u_2, t \in \mathbb{R}$$



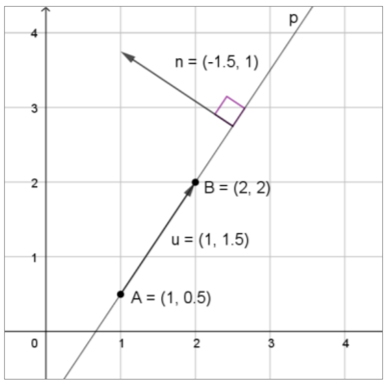
- $A[a_1, a_2]$ je libovolný bod na přímce p,
- $\vec{u} = (u_1, u_2)$ je směrový vektor přímky p (přímka je s tímto vektorem rovnoběžná),
- t je parametr přímky (každý bod na přímce je určen svým vlastním parametrem).

Pozn.: Pokud $t \in J \subset \mathbb{R}$, pak parametrická rovnice popisuje část přímky (např. $t \in \langle 0,1 \rangle$ je úsečka, $t \in \langle -2, \infty)$ je polopřímka).

2) **Obecná rovnice přímky**

Pokud z první souřadnice parametrické rovnice vyjádříme parametr $t = \frac{x-a_1}{u_1}$, který dosadíme do druhé souřadnice přímky, získáme rovnici

$$y = a_2 + \frac{x-a_1}{u_1} \cdot u_2.$$



Tuto rovnici upravíme:

$$y \cdot u_1 = a_2 \cdot u_1 + (x - a_1) \cdot u_2$$
$$x \cdot u_2 - y \cdot u_1 + a_2 \cdot u_1 - a_1 \cdot u_2 = 0$$
$$\boldsymbol{u_2} \cdot x + (-\boldsymbol{u_1}) \cdot y + (\boldsymbol{a_2} \cdot \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{a_1} \cdot \boldsymbol{u_2}) = 0$$

Označíme-li $u_2 = a, (-u_1) = b, (a_2 \cdot u_1 - a_1 \cdot u_2) = c$ pak rovnice má tzv. **obecný tvar**:

$$\boldsymbol{ax + by + c = 0}$$

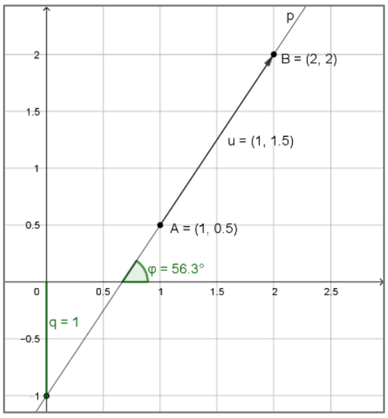
- $\vec{\boldsymbol{n}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ je **normálový vektor** přímky (vektor kolmý na přímku)

3) **Směrnicový tvar přímky**

Pokud v obecné rovnici přímky je $b \neq 0$ můžeme z ní vyjádřit y

$$y = -\frac{a}{b} \cdot x + \left(-\frac{c}{b}\right).$$

Označíme-li $k = -\frac{a}{b}, q = -\frac{c}{b}$ pak má rovnice tzv. **směrnicový tvar:** $\boldsymbol{y = k \cdot x + q}, \quad \boldsymbol{k, q} \in \mathbb{R}$**.**



- $\boldsymbol{k}$ je ***směrnice přímky*** p: $k = \operatorname{tg} \varphi$ (tangens úhlu, který přímka svírá s kladným směrem osy x),
- $\boldsymbol{q}$ je délka úseku, který vytíná přímka na ose y.

Je-li v obecné rovnici $b = 0$, pak je přímka rovnoběžná s osou y a její směrnicový tvar určit nelze.

4) **Úsekový tvar přímky**

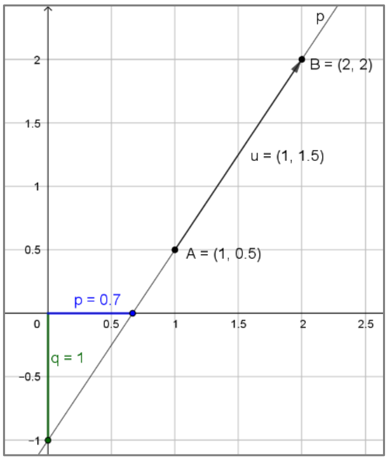
Je-li v obecné rovnici $c \neq 0$, lze z této obecné rovnice získat úsekový tvar přímky jejím upravením tak, aby se pravá strana rovnice rovnala 1:

$$ax + by + c = 0 \ \rightarrow ax + by = -c \rightarrow \frac{a}{-c}x + \frac{b}{-c}y = 1$$

$$\rightarrow \frac{x}{\frac{-c}{a}} + \frac{y}{\frac{-c}{b}} = 1$$

Nahradíme-li v předchozí rovnici $\frac{-c}{a} = p, \frac{-c}{b} = q$ získáme tzv. **úsekový tvar** přímky:

$$p: \frac{x}{\boldsymbol{p}} + \frac{y}{\boldsymbol{q}} = \mathbf{1}, p \neq 0, q \neq 0\,.$$



- $\boldsymbol{p}$ je úsek, který vytíná přímka na ose x,
- $\boldsymbol{q}$ je úsek, který vytíná přímka na ose y.

5) **Odchylka $\boldsymbol{\varphi}$ dvou přímek**

Jsou-li přímky popsány směrovými vektory $\vec{u}, \vec{v}$, pak jejich odchylku vypočítáme pomocí vzorce:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\,.$$

- V čitateli je absolutní hodnota skalárního součinu, protože odchylka dvou přímek $\varphi \in \langle 0°, 90° \rangle$ na rozdíl od odchylky úhlů, ve jmenovateli je pak součin velikostí vektorů.

6) **Vzájemná poloha dvou přímek v rovině**

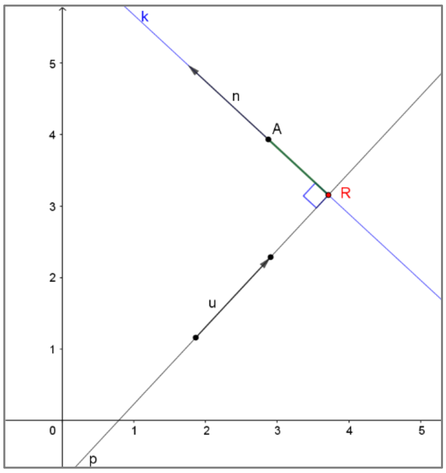
Vzájemnou polohu přímek určujeme podle počtu jejich průsečíků:

- je-li jeden, pak jsou různoběžné,
- není-li žádný, jsou rovnoběžné různé,
- je-li jich nekonečně mnoho, jsou rovnoběžné totožné.

Průsečík dvou přímek je bod, který leží na obou přímkách, jeho souřadnice tedy musí vyhovovat rovnicím obou přímek.

Pozn.: U rovnoběžných přímek je směrový vektor jedné přímky k-násobkem směrového vektoru přímky druhé ($k \in \mathbb{R} - \{0\}$).

7) **Vzdálenost bodu $A[a_1; a_2]$ od přímky $p: ax + by + c = 0$**



1. způsob řešení:

   vzorcem $v(A,p) = \frac{|a \cdot a_1 + b \cdot a_2 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

2. způsob řešení:

   výpočtem dle následujícího postupu konstrukce:
   a) Určíme kolmici k přímce p, která prochází bodem A.
   b) Vypočítáme průsečík R této kolmice s danou přímkou p.
   c) Vzdálenost průsečíku R od bodu A je hledaná vzdálenost bodu A od přímky p.

Úloha 4.16. Které body jsou s body $L[7; 3], M[-3; 1], N[2; 0]$ souměrné

a) osově podle osy x, $[L'[7; -3],\ M'[-3; -1],\ N'[2; 0]]$
b) osově podle osy y, $[L''[-7; -3],\ M''[3; 1],\ N''[-2; 0]]$
c) středově podle počátku? $[L'''[-7; -3],\ M'''[3; -1],\ N'''[-2; 0]]$

Pozn.: Načrtněte obrázek.

Úloha 4.17. Úsečku KL $(K[2; 4], L[8; 7])$ rozdělte dvěma dělícími body M, N na tři shodné díly. Jaké jsou souřadnice bodů K, L? $[M[4; 5], N[6; 6]]$

Úloha 4.18. Úsečku PQ $(P[12; 6], Q[2; 6])$ rozdělte na pět stejných dílů. Určete souřadnice dělících bodů. $[[10; 6], [8; 6], [6; 6], [4; 6]]$

Úloha 4.19. Určete, zda by vektor $\vec{v}$ mohl být směrovým vektorem přímky $p: x = 3 - 2t, y = -4 + 5t, t \in \mathbb{R}$:

a) $\vec{v} = (6; -15)$, $[ano]$
b) $\vec{v} = \left(-7; \frac{35}{2}\right)$, $[ano]$
c) $\vec{v} = \left(\frac{22}{3}; -\frac{55}{3}\right)$, $[ano]$
d) $\vec{v} = \left(-\frac{4}{5}; 3\right)$. $[ne]$

Úloha 4.20. Určete parametrické vyjádření přímky, která prochází bodem $B[-3,5]$ a má směrový vektor $\vec{u} = \left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{5}\right)$. $[x = -3 + 10t, y = 5 - 12t, t \in \mathbb{R}]$

Příklad 4.5. Jsou dány body $A[2,4], B[6,-4]$. Napište parametrické vyjádření

a) přímky AB, $[x = 2 + 4t, y = 4 - 8t, t \in \mathbb{R}]$
b) úsečky AB, $[x = 2 + 4t, y = 4 - 8t, t \in \langle 0,1 \rangle]$
c) úsečky BA. $[x = 6 - 4s, y = -4 + 8s, s \in \langle 0,1 \rangle]$

Řešení:

směrový vektor $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (6 - 2;\ -4 - 4) = (4; -8)$

a) K zápisu parametrických rovnic si vybereme bod, který leží na přímce, v našem případě např. A.
$p: x = 2 + 4t$
$\quad y = 4 - 8t, t \in \mathbb{R}$

b) Úsečka AB má stejný směrový vektor jako přímka AB, pouze je nutné omezit parametr t na interval $\langle 0; 1 \rangle$. Pokud do parametrických rovnic přímky (úsečky) AB dosadíme $t = 0$, získáme bod A. Pokud dosadíme $t = 1$ obdržíme bod B.

c) Vypočítáme vektor $\overrightarrow{BA} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2) = (2 - 6;\ 4 - (-4)) = (-4; 8)$.
Do parametrických rovnic můžeme dosadit např. bod B:

$\overline{BA}$: $x = 6 - 4s$
$\quad y = -4 + 8s, s \in \langle 0; 1 \rangle$.

Je možné do parametrických rovnic dosadit také bod A, potom je však nutné správně určit interval parametru.

$\overline{BA}$: $x = 2 - 4k$
$y = 4 + 8k, k \in \langle -1; 0 \rangle$.

Dosadíme-li za $k = -1$ získáme bod B a po dosazení $k = 0$ máme bod A.

Úloha 4.21. Napište všechny rovnice přímky $p = AB$:

a) $A[-2; 1], B[4; 3]$, $[x - 3y + 5 = 0]$

b) $A[5; -4], B[5; 10]$. $[9x - 6y + 40 = 0]$

Příklad 4.6. Přímka je dána obecnou rovnicí $p: 2x + 5y - 6 = 0$. Napište parametrický, úsekový a směrnicový tvar této přímky. $\left[p = \{3 + 5t, -2t, t \in \mathbb{R}\}, y = -\frac{2}{5}x + \frac{6}{5}, \frac{x}{3} + \frac{5y}{6} = 1\right]$

Řešení:

Parametrické rovnice:

Abychom získali z obecné rovnice parametrickou, musíme si zvolit parametr za x nebo y.

Zvolíme tedy $x = t$. Po dosazení $x = t$ do obecné rovnice obdržíme: $2t + 5y - 6 = 0$

Z této rovnice vyjádříme $y = \frac{6-2t}{5} = \frac{6}{5} - \frac{2}{5}t$.

Nyní seřadíme parametrické rovnice přímky k sobě:

$p: x = t$
$y = \frac{6}{5} - \frac{2}{5}t, t \in \mathbb{R}$.

Výsledné parametrické rovnice jsou závislé na volbě parametru. Lze zvolit také např. $y = -2t$, atd. Tím se změní parametrické rovnice přímky, na přímku samotnou však volba parametr vliv nemá.

Směrnicový tvar získáme, pokud z obecné rovnice vyjádříme $y = -\frac{2}{5}x + \frac{6}{5}$.

Úsekový tvar: obecnou rovnici se snažíme převést na tvar, kdy je pravá strana rovnice rovna 1.

$2x + 5y = 6 \rightarrow \frac{2}{6}x + \frac{5}{6}y = 1$

Tuto rovnici už jen upravíme: $\frac{x}{3} + \frac{5y}{6} = 1$.

Úloha 4.22. Napište rovnici přímky procházející body $H[-5; 0], K[0; 5]$. Určete chybějící souřadnici bodu $L[?\,; -2]$ ležící na této přímce. $[x - y + 5 = 0, -7]$

Úloha 4.23. Zkoumejte, zda bod C je bodem úsečky AB ($A[-3,4], B[6,7]$):

a) $C[15,10]$, [*není bodem úsečky*]

b) $C[0,5]$, [*je bodem úsečky*]

c) $C\left[-\frac{6}{5}, \frac{23}{5}\right]$. [*je bodem úsečky*]

Úloha 4.24. Jaký úhel svírá s osou x přímka:

a) $y = 3x$, $[71°33'54'']$

b) $y = -\frac{1}{2}x$, $[153°26'6'']$

c) $y = -x$. $[135°]$

Úloha 4.25. Napište rovnici přímky procházející počátkem a svírající s kladným směrem osy x úhel:

a) $60°$, $[y = \sqrt{3}x]$

b) $120°$, $[y = -\sqrt{3}x]$

c) $135°$. $[y = -x]$

Příklad 4.7. Napište obecnou rovnici přímky p, která prochází bodem $A[-4; 3]$ a je rovnoběžná s přímkou $q: 5x - 2y + 6 = 0$. $[5x - 2y + 26 = 0]$

Řešení:

Má-li být přímka p rovnoběžná s přímkou q, která je daná obecnou rovnicí, pak normálový vektor přímek musí být stejný.

Normálový vektor přímky q určíme jako koeficienty u x a y. Tedy $\vec{n}_q = (5; -2) = \vec{n}_p$.

Sestavíme obecnou rovnici přímky $p: 5x - 2y + c = 0$.

Dosadíme do obecné rovnice souřadnice bodu A, který na přímce p leží, získáme hodnotu c:

$$5 \cdot (-4) - 2 \cdot 3 + c = 0$$
$$-26 + c = 0$$
$$c = 26$$

Vypočítané $c = 26$ dosadíme a získáme obecnou rovnici přímky $\boldsymbol{p}$: $\mathbf{5x - 2y + 26 = 0}$.

Úloha 4.26. Určete rovnici přímky rovnoběžné s přímkou $2x + y - 3 = 0$ a procházející bodem $K[3; 7]$.
$[2x + y - 13 = 0]$

Úloha 4.27. Napište rovnici přímky rovnoběžné s osou y a procházející bodem $A[-15; 0]$. Rozhodněte, zda na ní leží bod $B[10; -15]$. $[x + 15 = 0, neleží]$

Úloha 4.28. Napište parametrické rovnice a obecnou rovnici přímky p, která prochází bodem $A[3; -1]$ a je:

a) rovnoběžná s přímkou $q: 2x + 3y + 7 = 0$,
$[x = 3 - 3t, y = -1 + 2t, t \in \mathbb{R}; 2x + 3y - 3 = 0]$

b) kolmá k přímce $k: x - 2y + 4 = 0$, $[x = 3 + t, y = -1 - 2t, t \in \mathbb{R}; 2x + y - 5 = 0]$

c) rovnoběžná s osou x, $[x = 3 + t, y = -1, t \in \mathbb{R}; y + 1 = 0]$

d) kolmá k ose y. $[x = 3 + t, y = -1, t \in \mathbb{R}; y + 1 = 0]$

Příklad 4.8. Vyšetřete vzájemnou polohu přímek:

a) $p = \{1 + 2t, 2 - 3t, t \in \mathbb{R}\}, q = \{5 + 4k, -4 - 6k, k \in \mathbb{R}\}$. $[p = q]$

b) $p = \{1 + 2t, 2 - 3t, t \in \mathbb{R}\}, q: 2x + y - 1 = 0$, $\big[R[-5; 11]\big]$

c) $p: 2x + y - 1 = 0, q: x - 2y - 8 = 0$. $\big[P[-2; -5]\big]$

Řešení:

a) Nejdříve porovnáme směrové vektory přímek. Pokud jsou násobkem, pak jsou přímky rovnoběžné $\rightarrow p: \vec{u} = (2; -3), q: \vec{v} = (4; -6)$.

$\vec{v} = 2\vec{u} \Rightarrow$ přímky jsou rovnoběžné.

Rovnoběžné přímky jsou buď různé, nebo splývající.
Toto můžeme určit tak, že bod z jedné přímky dosadíme do přímky druhé. Pokud bod leží i ve druhé přímce, pak přímky splývají.
Bod $P[1; 2] \in p$. Dosadíme souřadnice bodu P do parametrických rovnic přímky q:

$$1 = 5 + 4k$$
$$2 = -4 - 6k$$

Z první rovnice spočítáme k: $1 = 5 + 4k \rightarrow k = -1$
a ověříme, zda vyhovuje i rovnici druhé: $2 = -4 - 6(-1) \rightarrow 2 = 2$

Tedy bod P z přímky p leží i na přímce q, proto přímky **splývají**.

b) Je-li přímka p dána parametrickými rovnicemi a q obecnou rovnicí, pak můžeme dosadit parametrické rovnice přímky p do obecné rovnice přímky q:

$2(1 + 2t) + (2 - 3t) - 1 = 0$

Vypočítáme parametr $t: 2 + 4t + 2 - 3t - 1 = 0 \rightarrow t = -3$
Tento parametr dosadíme do parametrické rovnice přímky p a tím získáme průsečík přímek: $R[-5; 11]$. Tedy přímky jsou **různoběžné**.

c) Pokud jsou obě přímky dané obecnými rovnicemi, pak řešíme soustavu, která obsahuje tyto rovnice, a případně získáme souřadnice průsečíku.

(1) $2x + y - 1 = 0$
(2) $x - 2y - 8 = 0$

Z (2) vyjádříme $x = 8 + 2y$ a dosadíme do (1): $2(8 + 2y) + y - 1 = 0$
Z této rovnice vypočítáme $y = -5$ a dosadíme do rovnice $x = 8 + 2y = 8 + 2(-5) = -2$.

Vypočítali jsme průsečík $R[-2; -5]$ přímek.
Tedy přímky jsou **různoběžné**.

Úloha 4.29. Rozhodněte, jakou vzájemnou polohu mají uvedené dvojice přímek:

a) $\frac{1}{3}x - \frac{2}{5}y - \frac{4}{7} = 0;\ -35x + 42y + 60 = 0,$ $[rovnoběžné\ splývající]$

b) $\frac{2}{3}x + 4y + \frac{3}{2} = 0;\ -\frac{3}{5}x - \frac{7}{2}y + \frac{15}{4} = 0,$ [*různoběžné*]

c) $\frac{10}{3}x - \frac{15}{4}y + 1 = 0;\ -5x + \frac{45}{8}y + \frac{3}{2} = 0.$ $[rovnoběžné\ různé]$

Úloha 4.30. Rozhodněte, zda přímka $x = -4 + \frac{3}{2}t, y = 2 - 5t, t \in \mathbb{R}$ a přímka AB jsou rovnoběžné různé, rovnoběžné splývající nebo různoběžné:

a) $A[-3; -56], B[39; -32],$ [*různoběžné*]

b) $A\left[\frac{47}{4}; -\frac{29}{2}\right], B[11; -12],$ [*rovnoběžné různé*]

c) $A\left[-2; -\frac{14}{3}\right], B\left[-\frac{8}{7}; -\frac{158}{21}\right].$ [*rovnoběžné splývající*]

Úloha 4.31. Hledejte společné body přímek AB, CD:

a) $A[-4; 2], B\left[-\frac{11}{2}; 7\right], C[39; -32], D[-3; -56],$ $\left[P[11; -48]\right]$

b) $A[2; -18], B[-10;\ 22], C\left[\frac{47}{4}; -\frac{29}{2}\right], D[11; -12],$ [*rovnoběžné různé*]

c) $A\left[-\frac{7}{2}; \frac{1}{3}\right], B\left[-\frac{9}{2}; \frac{11}{3}\right], C\left[-\frac{8}{7}; -\frac{158}{21}\right], D\left[-2; -\frac{14}{3}\right].$ [*rovnoběžné splývající*]

Úloha 4.32. Rozhodněte, zda přímka $p: 2x + 7y - 12 = 0$ protíná úsečku $A[2; 3], B[5; -1].$ $[protíná]$

Úloha 4.33. Určete průsečíky přímky $MN\left(M[4; 10], N\left[-2; \frac{5}{2}\right]\right)$ a:

a) osy x,

b) osy y.

Pozn.: určete rovnice osy x a y.

Úloha 4.34. Určete hodnoty parametrů $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby dané přímky splývaly
$p: x = 1 - t, y = 2 + t, t \in \mathbb{R}; q: x = a + k, y = 5 + bk, k \in \mathbb{R}.$ $[a = -2, b = -1]$

Úloha 4.35. Napište rovnici přímky, která prochází průsečíkem přímek $2x + 3y + 4 = 0, 4x + 5y - 8 = 0$ a bodem $B[-2; 1]$. $[17x + 24y + 10 = 0]$

Příklad 4.9. Napište parametrické vyjádření kolmice vedené bodem $C[10; -11]$ k přímce $AB(A[-2; 5], B[1; 1])$ a určete patu P této kolmice na přímce AB:

$\left[x = 10 + 4t, y = -11 + 3t, t \in \mathbb{R}, P[10; -11]\right]$

Řešení:

Nejdříve určíme směrový vektor přímky AB: $\overrightarrow{AB} = B - A = (1 - (-2), 1 - 5) = (3, -4)$
Parametrická rovnice přímky AB (dosadíme např. bod A):

$$x = -2 + 3t$$
$$y = 5 - 4t, \in \mathbb{R}$$

1. způsob řešení:

Určíme směrový vektor $\vec{k}$ kolmice k: zaměníme souřadnice vektoru $\overrightarrow{AB}$ a u jedné souřadnice změníme znaménko $\rightarrow \vec{k} = (4; 3)$.

Parametrické rovnice kolmice (prochází bodem $C[10; -11]$): $k: x = 10 + 4s$
$y = -11 + 3s, s \in \mathbb{R}$

Patu kolmice (průsečík kolmice a přímky AB) vypočítáme porovnáním parametrických rovnic přímek:

$$(1) -2 + 3t = 10 + 4s$$
$$(2)\ 5 - 4t = -11 + 3s$$

Ze soustavy rovnic vypočítáme: $s = 0, t = 4$.

Dosazením $s = 0$ do rovnic kolmice a dosazením $t = 4$ do rovnic přímky AB získáme patu kolmice $\boldsymbol{P[10; -11]}$.

2. způsob řešení:
Směrový vektor přímky AB je zároveň normálovým vektorem její kolmice: $\vec{n}_k = \vec{u} = (3; -4)$.

Normálový vektor kolmice dosadíme do její obecné rovnice: $k: 3x - 4y + c = 0$

K výpočtu neznámé c dosadíme do rovnice bod, kterým kolmice prochází, tedy
bod $C[10; -11] \rightarrow 3 \cdot 10 - 4 \cdot (-11) + c = 0 \rightarrow c = -74$

$k: 3x - 4y - 74 = 0$

Nyní převedeme obecnou rovnici na rovnice parametrické:

a) Zvolíme např. $x = s$.
b) Dosadíme do obecné rovnice: $3s - 4y - 74 = 0$.
c) Vypočítáme y: $y = -\frac{74}{4} + \frac{3}{4}s$

Tedy parametrické rovnice kolmice:

$$k: x = s,\ y = -\frac{74}{4} + \frac{3}{4}s,\ \ s \in \mathbb{R}$$

Posledním krokem je určení paty kolmice:

- Protože máme jak obecnou tak parametrickou rovnici můžeme parametrické rovnice AB dosadit do obecné rovnice kolmice:

$$k: 3(-2 + 3t) - 4(5 - 4t) - 74 = 0$$

Vypočítáme parametr t: $t = 4$ a dosadíme do rovnice přímky AB

$$x = -2 + 3 \cdot 4 = 10$$
$$y = 5 - 4 \cdot 4 = -11$$

Tedy průsečík $P[10; -11]$.

- Také můžeme porovnat parametrické rovnice obou přímek:

(1) $s = -2 + 3t$

(2) $-\frac{74}{4} + \frac{3}{4}s = 5 - 4t$

Dosazením (1) do rovnice (2) vypočítáme $t = 4$.

Dosazením t do (1) vypočítáme $s = 10$.

Dosazením parametru $t = 4$ do parametrických rovnic přímky AB vypočítáme patu $\boldsymbol{P}[\mathbf{10}; \mathbf{-11}]$. Dosazením parametru $s = 10$ do parametrické rovnice kolmice získáme ten samý bod $\boldsymbol{P}[\mathbf{10}; \mathbf{-11}]$.

Úloha 4.36. Napište parametrické vyjádření kolmice vedené bodem $C[0; 0]$ k přímce AB ($A[-2; 5], B[1; 1]$) a určete patu P této kolmice na přímce AB.

$\left[x = 4t, y = 3t, t \in \mathbb{R}, P\left[\frac{28}{25}; \frac{21}{25}\right]\right]$

Úloha 4.37. Jsou dány vrcholy trojúhelníku $A[2; 3], B[7; 8], C[0; 10]$.

a) napište rovnice přímek, na kterých leží strany trojúhelníka,
$[x - y + 1 = 0, 2x + 7y - 70 = 0, 7x + 2y - 20 = 0]$

b) napište rovnice těžnic a určete souřadnice těžiště,
$\left[4x - y - 5 = 0, x - 4y + 25 = 0, x + y - 10 = 0, T[3; 7]\right]$

c) napište rovnice výšek trojúhelníka a určete souřadnice ortocentra.
$\left[7x - 2y - 8 = 0, 2x - 7y + 42 = 0, x + y - 10 = 0, V\left[\frac{28}{9}; \frac{62}{9}\right]\right]$

Úloha 4.38. Napište rovnici přímky, která prochází průsečíkem přímek $x + 4y = 0, 2x - 3y = 0$ a je kolmá k přímce $2x + 5y - 9 = 0$. $[5x - 2y = 0]$

Úloha 4.39. V rovnoramenném trojúhelníku ABC se základnou AB, $A[-3; 4], B[1; 6]$, leží vrchol C na přímce $5x - 6y - 16 = 0$. Vypočítejte souřadnice vrcholu C. $\left[C[2; -1]\right]$

Příklad 4.10. Určete odchylku přímek $2x - y + 10 = 0, -3x + 3y - 7 = 0$. $\left[\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}\right]$

Řešení:

Odchylku přímek lze počítat jak z vektorů směrových tak také z vektorů normálových. Protože jsou přímky dané obecnými rovnicemi, určíme normálové vektory $\vec{n}_1 = (2; -1), \vec{n}_2 = (-3; 3)$.

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|2(-3) + (-1)3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 3^2}} = \frac{|-9|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{18}} = \frac{9}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{9}} = \frac{9}{\sqrt{10} \cdot 3} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Úloha 4.40. Určete odchylku přímek $p = \{2 + t, 5, t \in \mathbb{R}\}, q: x + \sqrt{3}y - 6 = 0$. $[30°]$

Úloha 4.41. Vypočtěte odchylku přímek $p = \{A, \vec{a}\}$ a $q = \{B, \vec{b}\}$.

$A[5; -10], \vec{a} = (5; 2), B[4; 7], \vec{b} = (-1; 3)$. $\left[\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{290}}\right]$

Úloha 4.42. Jsou dány dvě přímky $p: ax + y - 4 = 0, q: x + 2y + 8 = 0$. Určete hodnotu parametru $a \in \mathbb{R}$ tak, aby:

a) přímky p, q byly navzájem kolmé, $[-2]$

b) odchylka přímek p, q byla 45°. $\left[3, -\frac{1}{3}\right]$

Úloha 4.43. Určete hodnoty parametrů a, b, c tak, aby přímka $ax + by + c = 0$ byla kolmá k přímce $x - 2y + 3 = 0$. $[b = k, a = 2k, k \in \mathbb{R}]$

Příklad 4.11. Vypočtěte vzdálenost bodu B od přímky $\{A, \vec{u}\}$:

a) $B[4; -2], A\left[-\frac{1}{2}; -1\right], \vec{u} = (15; 8)$, $[v = 3]$

b) $B[-3; 5], A\left[2; \frac{5}{3}\right], \vec{u} = (4; 3)$. $\left[v = \frac{17}{3}\right]$

Řešení:

Abychom mohli použít vzorec, musíme určit obecnou rovnici roviny.

Nejdříve sestavíme normálový vektor $\vec{n} = (8; -15)$ a vložíme do obecné rovnice roviny:

$8x - 15y + c = 0$.

Do této rovnice dosadíme bod $A\left[-\frac{1}{2}; -1\right]$ a dopočítáme c:

$$8\left(-\frac{1}{2}\right) - 15(-1) + c = 0 \rightarrow c = -11 \rightarrow 8x - 15y - 11 = 0$$

Dosadíme do vzorce pro výpočet vzdálenosti bodu od přímky:

$$v(B, p) = \frac{|a \cdot a_1 + b \cdot a_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|8 \cdot 4 - 15 \cdot (-2) - 11|}{\sqrt{8^2 + (-15)^2}} = \frac{51}{\sqrt{289}} = \frac{51}{17} = 3$$

Úloha 4.44. Který bod přímky $x - 2y + 4 = 0$ má stejnou vzdálenost od bodů $G[1; 5], H[3; 7]$? $[4; 4]$

Úloha 4.45. Na ose x najděte bod X, který má od bodu $B[6; -3]$ vzdálenost 7. $\left[X_{1,2}[6 \pm 2\sqrt{10}; 0]\right]$

Úloha 4.46. Vypočtěte vzdálenost přímky $\{x = 2 + 4t, y = 4 + 3t, t \in \mathbb{R}\}$ s přímkou rovnoběžnou, která protíná osu souřadnic v bodě $B\left[\frac{5}{2}; 0\right]$. $\left[v = \frac{7}{2}\right]$

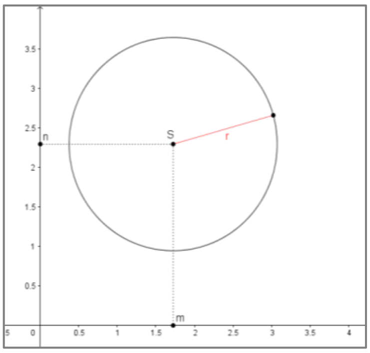
Úloha 4.47. Vypočtěte vzdálenost dvou rovnoběžných přímek AB, CD: $A\left[\frac{13}{6}; 0\right], B\left[0; \frac{26}{5}\right], C[-4; 20]$. $[v = 2]$

Úloha 4.48. Nalezněte přímky, které jsou rovnoběžné s přímkou $8x - 15y + 15 = 0$ a mají od bodu $S[6; -2]$ vzdálenost $v = 4$. $[8x - 15y - 10 = 0, 8x - 15y - 146 = 0]$

Úloha 4.49. Nalezněte přímky, které procházejí bodem $B[-2; 1]$ a mají od bodu $S[3; 1]$ vzdálenost $v = 4$. $[4x + 3y + 5 = 0, 4x - 3y + 11 = 0]$

4.3 KUŽELOSEČKY

1) **Kružnice** ($S[m, n]$ **střed** kružnice, r **poloměr** kružnice):



Středová rovnice:

$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$

Obecná rovnice kružnice:

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Tečna kružnice:

$(x - m)(x_0 - m) + (y - n)(y_0 - m) = r^2$

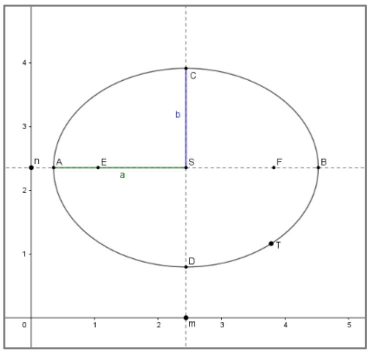
$T[x_0, y_0]$ bod dotyku

2) **Elipsa**

Středová rovnice:

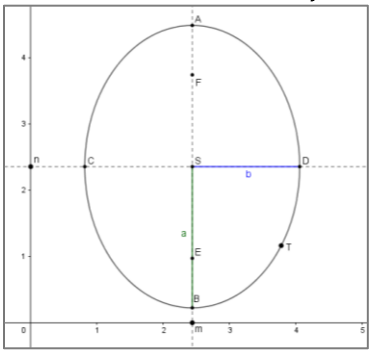
$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

hlavní osa rovnoběžná s x



$$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$$

hlavní osa rovnoběžná s y



- $S[m, n]$ je **střed** elipsy,
- a je velikost **hlavní poloosy** (vzdálenost hlavních vrcholů elipsy od jejího středu),
- b je velikost **vedlejší poloosy** (vzdálenost vedlejších vrcholů elipsy od jejího středu),
- **excentricita** e je vzdálenost ohniska elipsy od jejího středu: $e^2 = a^2 - b^2$.

Obecná rovnice $\quad Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0, A > 0, B > 0, A \neq B$

Tečna elipsy

$$\frac{(x-m)(x_0-m)}{a^2} + \frac{(y-n)(y_0-n)}{b^2} = 1$$ (hlavní osa rovnoběžná s x)

$$\frac{(x-m)(x_0-m)}{b^2} + \frac{(y-n)(y_0-n)}{a^2} = 1$$ (hlavní osa rovnoběžná s y)

$T[x_0, y_0]$ bod dotyku

Hyperbola

Hlavní osa rovnoběžná s osou x:

Středová rovnice:

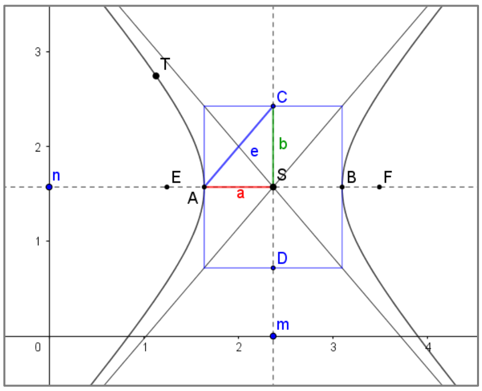
$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

Obecná rovnice: $Ax^2-By^2+Cx+Dy+E=0$, $A>0, B>0$

Rovnice asymptot: $y-n=\pm\frac{b}{a}(x-m)$

Tečna: $\frac{(x-m)(x_0-m)}{a^2}-\frac{(y-n)(y_0-n)}{b^2}=1$,

$T[x_0,y_0]$bod dotyku



Hlavní osa rovnoběžná s osou y:

Středová rovnice:

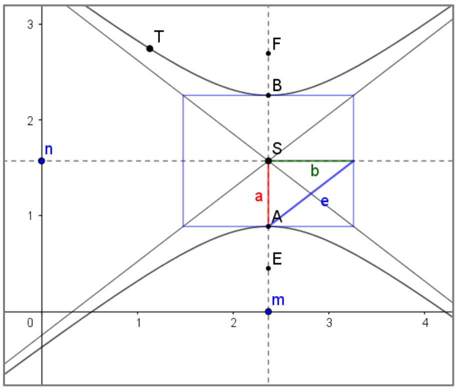
$$\frac{(y-n)^2}{a^2}-\frac{(x-m)^2}{b^2}=1$$

Obecná rovnice: $-Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$, $A>0, B>0$

Rovnice asymptot: $y-n=\pm\frac{a}{b}(x-m)$

Tečna: $\frac{(y-n)(y_0-n)}{a^2}-\frac{(x-m)(x_0-m)}{b^2}=1$,

$T[x_0,y_0]$ bod dotyku



- $S[m,n]$ je **střed** hyperboly,
- a je velikost **hlavní poloosy** (vzdálenost hlavních vrcholů hyperboly od jejího středu),
- b je velikost **vedlejší poloosy** (vzdálenost vedlejších vrcholů hyperboly od jejího středu),
- **excentricita** e je vzdálenost ohniska hyperboly od jejího středu: $e^2=a^2+b^2$,
- **asymptota** je tečna hyperboly v nekonečnu.

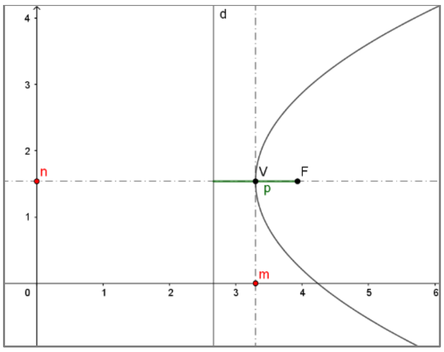
3) **Parabola** ($V[m,n]$ **vrchol** paraboly, p **parametr** paraboly)

Osa rovnoběžná s osou x:

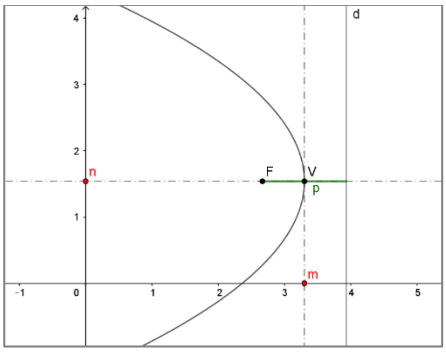
Vrcholová rovnice $(y-n)^2=\pm 2p(x-m), p>0$

Obecná rovnice $y^2+Ax+By+C=0, A\neq 0$

Tečna $(y-n)(y_0-n)=\pm p(x+x_0-2m)$, $T[x_0,y_0]$ bod dotyku



$(y-n)^2=+2p(x-m), p>0$



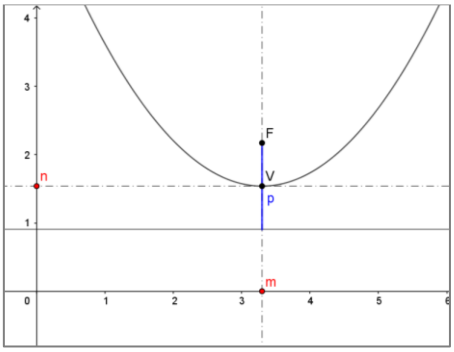
$(y-n)^2=-2p(x-m), p>0$

Osa rovnoběžná s osou y:

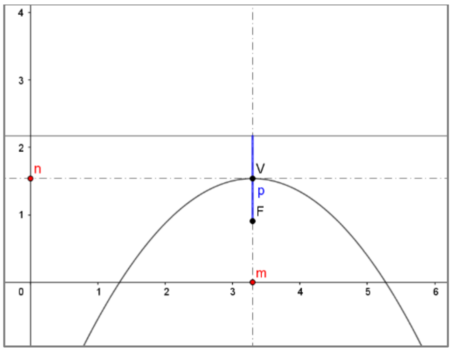
Vrcholová rovnice $(x-m)^2 = \pm 2p(y-n), p > 0$

Obecná rovnice $x^2 + Ax + By + C = 0,\ B \neq 0$

Tečna $(x-m)(x_0-m) = \pm p(y+y_0-2n),\ T[x_0, y_0]$ bod dotyku



$(x-m)^2 = +2p(y-n), p > 0$



$(x-m)^2 = -2p(y-n), p > 0$

---

1) KRUŽNICE

Úloha 4.50. Napište rovnici kružnice se středem v počátku soustavy souřadnic a s poloměrem $r = 10$. Určete její body, jejichž první souřadnice $x = 6$. $\left[x^2 + y^2 = 100,\ [6; \pm 8]\right]$

Příklad 4.12. Zkoumejte, zda existuje kružnice, která prochází třemi danými body A, B, C: $A[0; 8], B[7; 7], C[-2; 4]$. $[(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25]$

Řešení:

Dosadíme souřadnice bodů do středové rovnice kružnice:

$$(0-m)^2 + (8-n)^2 = r^2$$
$$(7-m)^2 + (7-n)^2 = r^2$$
$$(-2-m)^2 + (4-n)^2 = r^2$$

Soustavu vyřešíme:

$(1) m^2 + 64 - 16n + n^2 = r^2$
$(2) 49 - 14m + m^2 + 49 - 14n + n^2 = r^2$
$\underline{(3) 4 + 4m + m^2 + 16 - 8n + n^2 = r^2}$
$(1) m^2 + n^2 - r^2 = 16n - 64$
$(2) m^2 + n^2 - r^2 = 14m - 98 + 14n$
$\underline{(3) m^2 + n^2 - r^2 = 8n - 4m - 20}$
$(1)-(2): 0 = 16n - 14n - 64 + 98 - 14m$
$0 = 2n - 14m + 34$
$n = 7m - 17$
$(1)-(3): 0 = 8n + 4m - 44$

Dosadíme za n z předchozí rovnice:
$0 = 8(7m-17) + 4m - 44 = 56m - 136 + 4m - 44 = 60m - 180 \to m = 3$
Vypočítáme: $n = 7 \cdot 3 - 17 = 4$.
Souřadnice středu $S[m; n] = S[3; 4]$.
Hodnoty m, n dosadíme např. do rovnice (1) a vypočítáme r^2:

$(1)\ 3^2 + 64 - 16 \cdot 4 + 4^2 = r^2 \to r^2 = 25$

Nyní můžeme napsat středovou rovnici kružnice: $\boldsymbol{(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25}$.

Příklad 4.13. Určete střed a poloměr kružnice: $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$, $[S[2;3], r = 4]$

Řešení:

Rovnici kružnice musíme převést na středový tvar pomocí tzv. doplnění na čtverec:

$$x^2 - 4x + y^2 - 6y - 3 = 0$$
$$(x^2 - 4x) + (y^2 - 6y) = 3$$

Oba výrazy v závorce představují výraz $(a^2 \pm 2ab)$, ten potřebujeme převést na tvar $(a \pm b)^2$.
Protože však $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ je o b^2 větší než výraz $(a^2 \pm 2ab)$, musíme b^2 odečíst

$(a \pm b)^2 - b^2 = a^2 \pm 2ab$: $\quad (x-2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 = 3$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$$

Ze středového tvaru vyplývá střed $\boldsymbol{S[2;3]}$ a poloměr $\boldsymbol{r = 4}$.

Úloha 4.51. Určete střed a poloměr kružnice:

a) $x^2 + y^2 + 14x + 6y - 86 = 0$, $[S[-7;-3], r = 12]$
b) $x^2 + y^2 - 16x + 30y = 0$, $[S[8;-15], r = 17]$
c) $x^2 + y^2 + 4x - 12 = 0$, $[S[-2;0], r = 4]$
d) $x^2 + y^2 - 24y = 0$, $[S[0;12], r = 12]$
e) $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 3 = 0$, $\left[S\left[\frac{3}{2};-1\right], r = \frac{5}{2}\right]$
f) $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$, $[S[-1;2], r = \sqrt{5}]$
g) $4x^2 + 4y^2 - 4x + 4y + 1 = 0$, $\left[S\left[\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right], r = \frac{1}{2}\right]$
h) $3x^2 + 3y^2 - 2x + 6y + 2 = 0$, $\left[S\left[\frac{1}{3};-1\right], r = \frac{2}{3}\right]$
i) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y = 0$. $\left[S\left[1;-\frac{2}{3}\right], r = \frac{\sqrt{13}}{3}\right]$

Úloha 4.52. Napište rovnici kružnice, která má střed $S[2;1]$ a prochází bodem $K[6;-2]$. Vypočítejte souřadnice bodů, ve kterých kružnice protíná osy x a y.

$\left[(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25, X_{1,2}\left[2 \pm 2\sqrt{6};0\right], Y_{1,2}\left[0;1 \pm \sqrt{21}\right]\right]$

Příklad 4.14. Napište rovnici kružnice, která prochází body $A[3;0], B[-1;2]$ a má střed na přímce $x - y + 2 = 0$. $[(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25]$

Řešení:

Jedním možným řešením může být určení středu kružnice.

Střed musí ležet na dané přímce, tedy souřadnice $S[m,n]$ musí vyhovovat její rovnici → $m - n + 2 = 0$.

Také pro kružnici vždy platí, že vzdálenost středu od každého bodu na kružnici je stejná →

$$|SA| = |SB| \rightarrow \sqrt{(3-m)^2 + n^2} = \sqrt{(-1-m)^2 + (2-n)^2}$$

Tím získáme dvě rovnice o dvou neznámých, jejichž vyřešením získáme souřadnice středu:

$$(1) m - n + 2 = 0$$
$$(2) \sqrt{(3-m)^2 + n^2} = \sqrt{(-1-m)^2 + (2-n)^2}$$

Rovnici (2) nejdříve upravíme:

$$\sqrt{9 - 6m + m^2 + n^2} = \sqrt{1 + 2m + m^2 + 4 - 4n + n^2} \,/^2$$
$$9 - 6m + m^2 + n^2 = 5 + 2m + m^2 - 4n + n^2$$
$$9 - 6m = 5 + 2m - 4n$$
$$4 - 8m + 4n = 0$$

Soustava po úpravě:

$$(1)\ m - n + 2 = 0$$
$$(2)\ 4 - 8m + 4n = 0$$

Z (1) vyjádříme $m = n - 2$ a dosadíme do (2):

$4 - 8(n-2) + 4n = 0 \rightarrow n = 5$. Pomocí n vypočítáme $m = 3$.

Vzhledem k úpravě rovnice musíme ještě provést zkoušku. Do rovnic (1) a (2) dosadíme výsledek a ověříme jeho správnost:

(1) $m - n + 2 = 0 \ \rightarrow 3 - 5 + 2 = 0$

(2) $\sqrt{(3-m)^2 + n^2} = \sqrt{(-1-m)^2 + (2-n)^2} \rightarrow$
$\sqrt{(3-3)^2 + 5^2} = \sqrt{(-1-3)^2 + (2-5)^2} \rightarrow \sqrt{0+25} = \sqrt{16+9} \rightarrow 5 = 5$

Zkouška je v pořádku. Tedy střed kružnice je bod $S[3;5]$.

Poloměr vypočítáme např. jako velikost vektoru $|\overrightarrow{SA}| = \sqrt{(3-3)^2 + 5^2} = 5$.

Rovnice kružnice: $\boldsymbol{(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25}$.

Příklad 4.15. Hledejte tečny kružnice $x^2 + y^2 = 5$, které jsou rovnoběžné s přímkou $2x - y + 1 = 0$.
$[2x - y - 5 = 0, 2x - y + 5 = 0]$

Řešení:
Tečna musí být rovnoběžná se zadanou přímkou, tedy musí mít stejný normálový vektor $\rightarrow 2x - y + c = 0$.
Bod $T[x_0, y_0]$ je právě jeden průsečík tečny a kružnice, musí tedy vyhovovat jak rovnici tečny, tak rovnici kružnice:

$x_0^2 + y_0^2 = 5$
$2x_0 - y_0 + c = 0$

Z rovnice (2): $y_0 = 2x_0 + c$.

Dosadíme do (1): $x_0^2 + (2x_0 + c)^2 = 5$ a upravíme: $5x_0^2 + 4cx_0 + c^2 - 5 = 0$

Vypočítáme diskriminant této kvadratické rovnice:

$D = b^2 - 4ac = 16c^2 - 4 \cdot 5 \cdot (c^2 - 5) = -4c^2 + 100$.

Aby řešení bylo právě jedno (právě jeden bod dotyku), musí se diskriminant rovnat 0:

$$D = -4c^2 + 100 = 0 \rightarrow c^2 = 25 \rightarrow c = \pm 5$$

Vypočítané c dosadíme do rovnice tečny: $\boldsymbol{2x - y + 5 = 0, 2x - y - 5 = 0}$.

Úloha 4.53. Určete rovnice tečen kružnice $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$, které procházejí počátkem soustavy souřadnic. $[y = 0, 20x - 21y = 0]$

Úloha 4.54. Určete rovnici kružnice, která má střed v bodě $S[0;12]$ a dotýká se přímky $x + y - 4 = 0$. $[x^2 + (y-12)^2 = 32]$

Úloha 4.55. Najděte společné body a určete vzájemnou polohu kružnice $x^2 + y^2 - 289 = 0$ a přímky $x - 4y + 17 = 0$. $\left[[15;8], [-17;0], sečna\right]$

2) ELIPSA

Úloha 4.56. Napište rovnici elipsy se středem $S[2;3]$ a délky poloos $a = 13, b = 5$, přičemž její hlavní osa je rovnoběžná s osou x. Určete její ohniska. $\left[\frac{(x-2)^2}{169} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1, E[-10;3], F[14;3]\right]$

Úloha 4.57. Napište rovnici elipsy, která má ohniska $E[-2;-2], F[-2;6]$ a hlavní vrchol $A[-2;7]$.
$\left[\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1\right]$

Úloha 4.58. Napište rovnici elipsy, znáte-li hlavní vrcholy $A[-4;-1], B[3;-1]$ a vedlejší vrchol $C\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$. $\left[\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{49}{4}} + \frac{(y+1)^2}{\frac{25}{4}} = 1\right]$

Úloha 4.59. Napište rovnici elipsy, která má střed v počátku soustavy souřadnic a prochází body $M[12; 12], N[16; 9]$

$\left[\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{225} = 1\right]$

Úloha 4.60. Určete střed, vrcholy, ohniska a délky poloos elipsy s rovnicí:

a) $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$,

$\left[S[1; -2], a = 3, b = 2, C[4; -2], D[-2; -2], A[1; 0], B[1; -4], E_{1,2}[1 \pm \sqrt{5}; -2]\right]$

b) $144x^2 + 25y^2 - 864x + 200y - 1904 = 0$.

$\left[S[3; -4], a = 12, b = 5, C[8; -4], D[-2; -4], A[3; 8], B[3; -16], E_{1,2}[3; -4 \pm \sqrt{119}]\right]$

Úloha 4.61. Zkoumejte, která z přímek $4x + 5y - 25 = 0, 9x - 5y - 15 = 0, 5x + 8y + 40 = 0$ je sečna, tečna, nebo nesečna elipsy $9x^2 + 25y^2 = 225$. V případě sečny hledejte průsečíky, v případě tečny dotykový bod.

$\left[tečna\ T\left[4; \frac{9}{5}\right];\ sečna\ M[0; -3], N\left[3; \frac{12}{5}\right];\ nesečna\right]$

Úloha 4.62. Napište rovnici tečny a normály v bodě $M\left[2; \frac{\sqrt{27}}{2}\right]$ elipsy $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$.

$\left[9x + 4\sqrt{27}y - 72 = 0, 8\sqrt{27}x - 18y - 7\sqrt{27} = 0\right]$

Úloha 4.63. Hledejte tečny elipsy $2x^2 + 8y^2 - 16 = 0$, které procházejí bodem $Z[-2; 3]$.

$[x + 2y - 4 = 0, 7x - 2y + 20 = 0]$

3) HYPERBOLA

Úloha 4.64. Určete střed, vrcholy, osy, délky poloos hyperboly $16x^2 - 9y^2 = 144$.

$\left[S[0; 0], A, B[\pm 3; 0], a = 3, b = 4, E_{1,2}[\pm 5; 0], e = 5\right]$

Úloha 4.65. Napište rovnici hyperboly, která má střed $S[1; -2]$, hlavní poloosu $a = 8$ rovnoběžnou s osou x a vedlejší poloosu délky $b = 15$. $[225x^2 - 64y^2 - 450x - 256y - 14431 = 0]$

Úloha 4.66. Napište rovnici hyperboly, která má ohniska $E[-2; 1], F[6; 1]$ a hlavní vrchol $A[4; 1]$.

$\left[\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{12} = 1\right]$

Úloha 4.67. Určete střed, osy, vrcholy a ohniska hyperboly $25x^2 - 144y^2 - 50x - 288y - 3719 = 0$.

$[S[1; -1], a = 12, b = 5, A[13; -1], B[-11; -1], E[14; -1], F[-12; -1], e = 13]$

Úloha 4.68. Napište rovnici tečny a normály v bodě $T[5; -4]$ hyperboly $4x^2 - 5y^2 - 20 = 0$.

$[x + y - 1 = 0, x - y - 9 = 0]$

Úloha 4.69. Určete společné body přímky s danou přímkou, rozhodněte o jejich poloze, a jde-li o sečnu, určete délku tětivy:

a) $4x - 3y = 12, 4x^2 - 9y^2 = 36$, $\left[\left[5; \frac{8}{3}\right], [3; 0], d = \frac{10}{3}\right]$

b) $5x - 4y = 16, 9x^2 - 16y^2 = 144$, $\left[T\left[5; \frac{9}{4}\right] bod\ dotyku\right]$

c) $x - y = 0, 25y^2 - 144y^2 = 3600$, $[neprotínají\ se]$

d) $9x - 4y - 144 = 0, 9x^2 - 16y^2 = 2304$. $\left[[20; 9], [16; 0], d = \sqrt{97}\right]$

Úloha 4.70. Hledejte dotykový bod tečny $2x - y - 8 = 0$ hyperboly $8x^2 - 18y^2 - 144 = 0$. $T\left[\frac{9}{2}; 1\right]$

Úloha 4.71. Hledejte tečny hyperboly $6x^2 - 15y^2 - 90 = 0$ rovnoběžné s přímkou:

a) $x + y - 7 = 0$, $[x + y + 3 = 0, x + y - 3 = 0]$

b) $x - 2y = 0$. $[neexistují]$

4) PARABOLA

Příklad 4.16. Napište rovnici paraboly s ohniskem $F[0; 10]$ a s řídící přímkou $d: y - 2 = 0$.

$[x^2 - 16y + 96 = 0]$

Řešení:

Podle definice je parabola množina všech bodů $M[x; y]$ v rovině, které mají stejnou vzdálenost od ohniska F a od řídící přímky d.

Vzdálenost bodů M, F: $|\overrightarrow{MF}| = \sqrt{(0-x)^2 + (10-y)^2}$.

Vzdálenost přímky d a bodu M: $v(M, d) = \frac{|0 \cdot x + 1 \cdot y - 2|}{\sqrt{0^2 + 1^2}}$.

Tyto dvě rovnice se musí rovnat $|\overrightarrow{MF}| = v(M, d)$: $\sqrt{(0-x)^2 + (10-y)^2} = \frac{|0 \cdot x + 1 \cdot y - 2|}{\sqrt{0^2 + 1^2}}$.

Rovnici upravíme:

$\sqrt{x^2 + 100 - 20y + y^2} = |y - 2| /^2$

$x^2 + 100 - 20y + y^2 = y^2 - 4y + 4$

$\boldsymbol{x^2 - 16y + 96 = 0}$ je rovnicí paraboly.

Úloha 4.72. Určete vrchol, ohnisko, parametr, osu a řídící přímku paraboly:

a) $x^2 - 4x - 6y + 10 = 0$, $[V[2; 1], E[2; 2{,}5], p = 3, x - 2 = 0{,}2y + 1 = 0]$

b) $x^2 + 6x - 8y + 9 = 0$, $[V[-3; 0], E[-3; 2], p = 4, x + 3 = 0, y + 2 = 0]$

c) $4y^2 - 48x - 12y + 9 = 0$. $\left[V\left[0; \frac{3}{2}\right], E\left[3; \frac{3}{2}\right], p = 6{,}2y - 3 = 0, x + 3 = 0\right]$

Úloha 4.73. Napište rovnici paraboly, která má vrchol v počátku:

a) osa je shodná s osou y a prochází bodem $M[4; 8]$, $[x^2 = 2y]$

b) osa je shodná s osou x a prochází bodem $N[-4; -1]$. $\left[y^2 = -\frac{1}{4}x\right]$

Úloha 4.74. Napište rovnici paraboly, která prochází body $K[-5; 3], L[1; -3], M[-9; -13]$ a její osa je rovnoběžná s osou y. $[(x + 3)^2 = -2(y - 5)]$

Úloha 4.75. Zjistěte polohu bodů $K[8; -8], L[11; 9], M\left[11; \frac{19}{2}\right]$ vzhledem k parabole o ohnisku $F[2; 0]$ a řídící přímce o rovnici $x + 2 = 0$.

$[K\ na\ parabole, L\ uvnitř\ paraboly, M\ vně\ paraboly]$

Úloha 4.76. Zkoumejte, která z přímek $x - 3 = 0, 4x - y + 5 = 0, 9x - 2y + 2 = 0, 6x + y - 6 = 0$ je sečna, tečna, nebo nesečna paraboly $y^2 - 18x = 0$. Je-li přímka sečnou, najděte průsečíky, je-li tečnou, najděte bod dotyku.

$\left[sečna\ Q\left[\frac{1}{2}; 3\right];\ nesečna;\ tečna\ T\left[\frac{2}{9}; 2\right];\ sečna\ M[2; -6], N\left[\frac{1}{2}; 3\right]\right]$

Úloha 4.77. Hledejte tečny paraboly $y^2 - 12x = 0$, které jsou rovnoběžné s přímkou $3x - y + 5 = 0$.

$[3x - y + 1 = 0]$

5) KUŽELOSEČKY

Příklad 4.17. Zjistěte, zda je rovnicí $4x^2 - 9y^2 + 18y - 45 = 0$ zadána kuželosečka. Pokud ano, určete typ této kuželosečky. $\left[Hyperbola, S[0; 1], a = 3, b = 2, e = \sqrt{13}\right]$

Řešení:

Členy s neznámou x a y v rovnici tzv. doplňujeme na čtverec (viz Příklad 4.13) a dle tvaru upravené rovnice usuzujeme na typ kuželosečky.

$4\mathrm{x}^2 - 9\mathrm{y}^2 + 18\mathrm{y} - 45 = 0$

$4\mathrm{x}^2 - 9(\mathrm{y}^2 - 2\mathrm{y}) - 45 = 0$

$4\mathrm{x}^2 - 9(\mathrm{y} - 1)^2 + 9 - 45 = 0$

$4\mathrm{x}^2 - 9(\mathrm{y} - 1)^2 - 36 = 0$

$4\mathrm{x}^2 - 9(\mathrm{y} - 1)^2 = 36$

Pravá strana rovnice musí být rovna 1:

$$\frac{4x^2}{36} - \frac{9(y-1)^2}{36} = 1$$
$$\frac{x^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

Dle tvaru rovnice (jeden zlomek je záporný) je kuželosečka hyperbolou: $\mathbf{S[0;1]}, \mathbf{a = 3}, \mathbf{b = 2}$.
Excentricitu vypočítáme dle vzorce $e^2 = a^2 + b^2 = 9 + 4 \rightarrow \mathbf{e = \sqrt{13}}$.

Úloha 4.78. Zjistěte, zda je rovnicí zadána kuželosečka. Pokud ano, určete typ kuželosečky.

a) $4x^2 + 4y^2 - 8x + 12y - \frac{69}{4} = 0,$ $\left[Kružnice, S\left[1; -\frac{3}{2}\right], r = \frac{11}{4}\right]$

b) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0,$ $[Elipsa, S[1;2], a = 3, b = 2, e = \sqrt{5}]$

c) $x^2 + 4x + 2y + 2 = 0,$ $\left[Parabola, V[-2;1], F\left[-2;\frac{1}{2}\right], d: y = \frac{3}{2}\right]$

d) $x^2 + y^2 - 12x + 40 = 0,$ $[\emptyset]$

e) $x^2 - 4y^2 + 4x - 8y = 0,$ $[dvě\ přímky\ x - 2y = 0, x + 2y + 4 = 0]$

f) $2x^2 + 3y^2 - 12x + 6y + 21 = 0,$ $[bod\ [3;-1]]$

g) $4x^2 + y^2 - 4x = 0.$ $\left[Elipsa, S\left[\frac{1}{2};0\right], a = 1, b = \frac{1}{2}, e = \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

Úloha 4.79. Určete, pro které hodnoty parametru $k \in \mathbb{R}$ má daná přímka s kuželosečkou právě jeden společný bod, dva společné body, nebo žádný společný bod.

a) $y = kx, x^2 + 4y^2 - 6x + 1 = 0,$ $[|k| < \sqrt{2}\ sečna, |k| = \sqrt{2}\ tečna, |k| > \sqrt{2}\ vnější\ přímka]$

b) $y = kx + 2, x^2 + 4y^2 = 16,$ $[k = 0\ tečna, k \neq 0\ sečna]$

c) $8x - 4y + k = 0, y^2 - 4x = 0,$ $[k < 16\ sečna, k = 16\ tečna, k > 16\ vnější\ přímka]$

d) $y = k, x^2 + 4y^2 = 36.$ $[|k| < 3\ sečna, |k| = 3\ tečna, |k| > 3\ vnější\ přímka]$

SYMBOLICKÝ ZÁPIS KONSTRUKCE

	Píšeme	**Čteme**
Bod	$A, B, C, D, \dots$ (velké arabské písmeno)	Bod A, B, C, D, …
Přímka	$a, b, c, d, \dots$ (malé arabské písmeno)	Přímka a, b, c, d, …
	$\leftrightarrow AB$ nebo $\overleftrightarrow{AB}$	Přímka AB.
Polopřímka	$\mapsto AB$ nebo $\overrightarrow{AB}$	Polopřímka AB s počátečním bodem A.
Úsečka	$\overline{AB}$ nebo $-AB$	Úsečka AB.
Rovina	$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ (malé řecké písmeno)	Rovina $\alpha, \beta, \gamma, \delta$,…
	(ABC)	Rovina daná třemi body A, B, C.
	(Aa)	Rovina daná bodem A a přímkou a.
	(ab)	Rovina daná dvěma přímkami a, b.
Polorovina	$\overrightarrow{(ABC)}$; $\mapsto (ABC)$	Polorovina je dána hraniční přímkou AB a bodem C.
	$\overrightarrow{(aA)}$; $\mapsto (aA)$	Polorovina je dána hraniční přímkou a a bodem A.
Úhel	$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ (malé řecké písmeno)	Úhel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ …
	$\measuredangle ABC$ (B … vrchol)	Úhel je daný body A, B, C. Úhel je daný přímkami BA, BC.
	$\measuredangle ab$	Úhel je daný přímkami a, b.
Vektor	$\vec{u}, \vec{v}, \vec{a}, \dots$ (malé arabské písmeno s šipkou nad ním)	Vektor $u, v, a, \dots$
	$\overrightarrow{AB}$	Vektor AB (určený počátečním bodem A a koncovým bodem B).
Kružnice	$k(S, 3); k(S, r = 3)$	Kružnice k se středem S a poloměrem 3.
	$k(S, \|AB\|)$	Kružnice se středem S a poloměrem daným velikostí úsečky AB.
A zároveň	$\wedge$	např. $p \perp q \wedge P \in p$ Přímka p je kolmá k přímce q a zároveň prochází bodem P.
Nebo	$\vee$	Např. $B \in a \vee B \in b$ Bod B leží na přímce a nebo na přímce b.
Incidence		
Bod na přímce	$A \in a$	Bod A leží na přímce a. Bod A inciduje s přímkou a.
	$a \ni A$	Přímka a prochází bodem A. Přímka a obsahuje bod A.
	$A \notin a$	Bod A neleží na přímce a. Bod A neinciduje s přímkou a.
	$a \not\ni A$	Přímka a neobsahuje bod A. Přímka a neprochází bodem A.

Polohové vlastnosti		
Rovnoběžky	$a \parallel b$	Přímka a je rovnoběžná s přímkou b.
	$a \nparallel b$	Přímka a není rovnoběžná s přímkou b.
Různoběžky	$a \times b$	Přímky a, b jsou různoběžné.
Průsečík	$A = a \cap b$	bod A je průsečíkem přímek a, b
Průnik (je-li průsečíků více než jeden)	$\{A, B\} \subset k \cap l$	Body A, B jsou průsečíky kružnic k, l.
	$\mapsto AB \subset a \cap \mapsto ABC$	Polopřímka AB je průnikem přímky a a poloroviny určené přímkou AB a bodem C.
Metrické vlastnosti		
Vzdálenost bodů A, B	$\lvert AB\rvert = 2$	Vzdálenost bodů A, B je 2.
Velikost úsečky AB		Velikost úsečky AB je 2.
Vzdálenost rovnoběžek a, b	$\lvert ab\rvert = 2$	Vzdálenost rovnoběžek a, b je 2.
Velikost úhlu (= **odchylka**)	$\lvert\alpha\rvert = 30°$	Velikost úhlu α je 30°.
	$\lvert\measuredangle ABC\rvert = 30°$	Velikost úhlu ABC je 30°.
	$\lvert\measuredangle ab\rvert = 40°$	Odchylka přímek a, b je 40°.
Kolmost	$a \perp b$	Přímka a je kolmá k přímce b. Přímky a, b jsou vzájemně kolmé
	$a \perp \alpha$	Přímka a je kolmá k rovině α. Přímka a a rovina α jsou vzájemně kolmé.
	$\alpha \perp \beta$	Rovina α je kolmá k rovině β. Roviny α, β jsou vzájemně kolmé.
Zobrazení		
Osová souměrnost	$O(o): A \to A'$	V osové souměrnosti s osou o se zobrazí bod A na bod A'.
Středová souměrnost	$S(S): A \to A'$	Ve středové souměrnosti se středem souměrnosti S se zobrazí bod A na bod A'.
Otáčení	$R(S, 30°): A \to A'$	V otáčení se středem otáčení S o úhel 30° **proti** směru hodinových ručiček se zobrazí bod A na bod A'.
	$R(S, -30°): A \to A'$	V otočení se středem otáčení S o úhel 30° **po** směru hodinových ručiček se zobrazí bod A na bod A'.
Posunutí	$T(\vec{v}): A \to A'$	V posunutí o vektor $\vec{v}$ se zobrazí bod A na bod A'.
Osová afinita	$A(o, AA'): B \to B'$	V osové afinitě s osou afinity o a směrem afinity určené párem odpovídajících si bodů $A,\ A'$ se zobrazí bod B na bod B'.
Středová kolineace	$K(S, o, AA'): B \to B'$	Ve středové kolineaci se středem kolineace S, s osou kolineace o a párem odpovídajících si bodů $A,\ A'$ se zobrazí bod B na bod B'.

Pravidla zápisu:

1. Pořadí jednotlivých kroků zapisujeme dle skutečného postupu konstrukce.
2. Jednotlivé kroky jsou číslované.
3. Nejdříve píšeme, co chceme sestrojit, následuje středník a poté zápis konstrukce tohoto objektu.
4. Slovní popis využíváme co možná nejméně.
5. Nikdy nelze definovat prvek v konstrukci, pomocí sebe sama.
6. Nelze popsat postup konstrukce prvku, pomocí jiného prvku, který však nebyl dosud popsán.
7. Poslední bod zápisu je vždy konstruovaný objekt.

Příklad 5.1: V prostoru určete vzdálenost bodu A od přímky a.

1) $\alpha; \alpha \perp a \wedge A \in \alpha$ (čteme: rovina α je kolmá k přímce a a zároveň prochází bodem A),
2) $R; R = a \cap \alpha$ (čteme: bod R je průsečík přímky a a roviny α),
3) $|Aa|; |Aa| = |AR|$ (čteme: velikost úsečky AR se rovná vzdálenosti bodu A a přímky a).