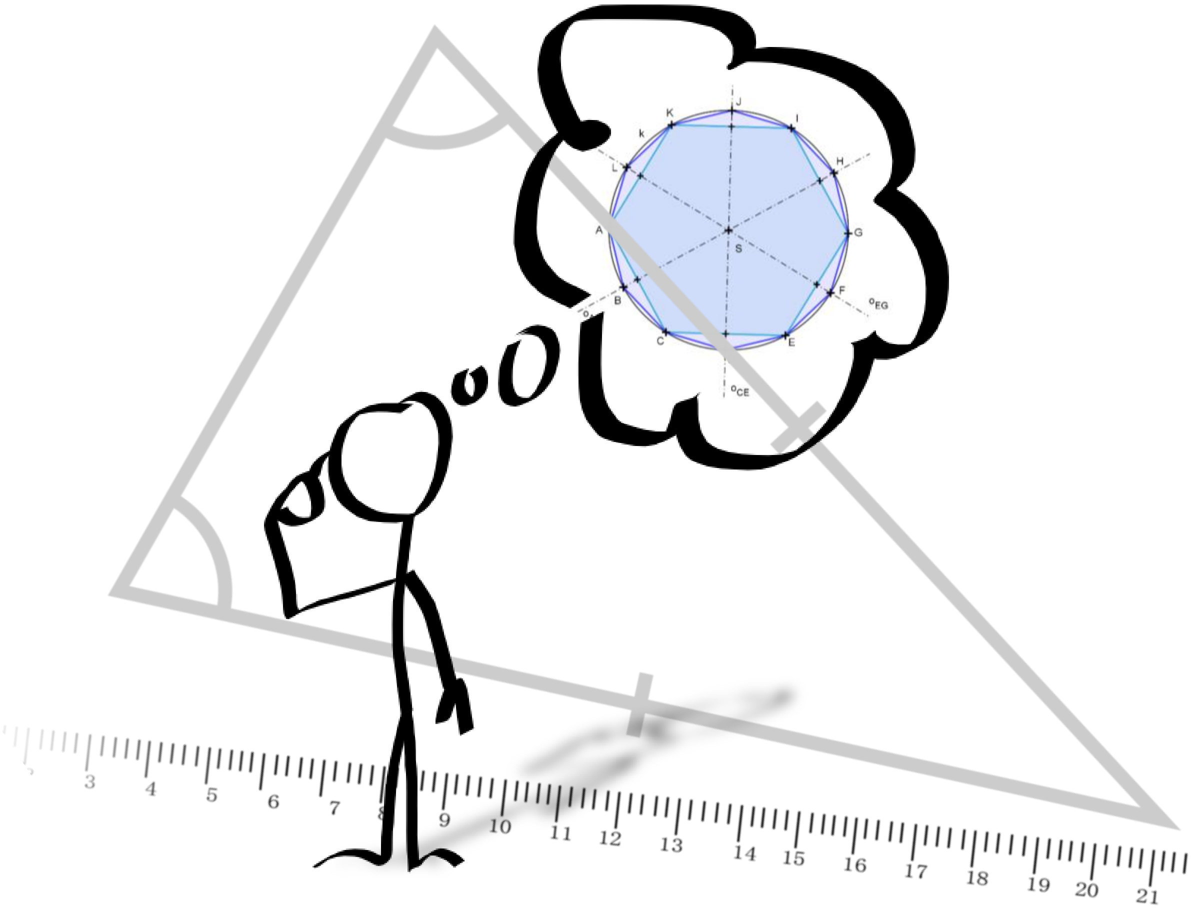
TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
KATEDRA MATEMATIKY A DIDAKTIKY MATEMATIKY

Daniela **B í m o v á**
Petra **P i r k l o v á**

VYBRANÉ KAPITOLY Z GEOMETRIE
Pracovní sešit I



Liberec 2020

Určeno pro účastníky Opakovacího kurzu SŠ matematiky, geometrie a fyziky.

OBSAH

PŘEDMLUVA

Studijní text *Vybrané kapitoly z geometrie* slouží primárně jako pomůcka pro zopakování a shrnutí vybraných kapitol středoškolské geometrie a deskriptivní geometrie, které jsou potřebné pro další studium technických oborů na univerzitě. Text je určen pro účastníky *Opakovacího kurzu SŠ matematiky a geometrie* pořádaného katedrou matematiky a didaktiky matematiky Technické univerzity v Liberci. Celý text je rozdělen do dvou pracovních sešitů (kapitoly 1-2 a kapitoly 3-5). V textu jsou rozlišeny řešené příklady a zadání úloh k procvičení.

Pracovní sešit I obsahuje dvě kapitoly. První kapitola je věnována základním rovinným obrazcům a křivkám (kružnici a elipse). Tyto křivky jsou zde zmiňovány kvůli zobrazování kružnice v Mongeově promítání, které je dále potřebné pro zobrazování šroubovice a ploch. Kapitola druhá je zaměřena na připomenutí poznatků o základních tělesech. Jsou do ní zařazeny příklady určené k sestrojení základních těles na základě zadaných prvků. Na webovém linku *https://www.geogebra.org/m/cmnffkdq* jsou umístěna slovní a také grafická zadání úloh k procvičení v prostředí 3D okna programu GeoGebra. S užitím jeho nástrojů existuje možnost řešení úloh přímo v online prostředí tohoto programu. Na webovém linku *https://www.geogebra.org/m/kaggkbfq* se nachází vzorová řešení všech úloh k procvičení. Zopakovaných poznatků je s výhodou užito při řešení rovinných řezů hranolů a jehlanů. Zde upozorňujeme na dva webové linky, a to *https://www.geogebra.org/m/qwyzkk92* a *https://www.geogebra.org/m/pht5gqzn*. Na prvním z nich je uložena GeoGebra kniha se zadáním úloh k procvičení sestrojení rovinných řezů základních těles, na druhém z nich jsou pak umístěna pro možnost kontroly i vzorová řešení úloh k procvičení. Kapitola je zakončena propedeutickými úlohami věnovanými pravoúhlým pohledům na tělesa. Tyto úlohy vhodně uvádějí kapitolu, která je již obsažena v Pracovním sešitu II.

Úvodní kapitola ***Pracovního sešitu II*** je věnována opakování Mongeova promítání. Jsou zde zmíněny všechny základní úlohy, každá z těchto úloh je doplněna pracovním listem k procvičení. Všechny úlohy jsou označeny číslem (např. PL 22), toto označení uvádí číslo zadaného příkladu v pracovních listech dostupných v GeoGebra knize na stránce *https://www.geogebra.org/m/dhhwyrwh*, kde jsou vloženy nejen obsáhlejší pracovní listy, ale také krokovaná řešení všech úloh včetně postupu řešení.

V další kapitole je zopakována analytická geometrie v rovině, která je potřebná k pochopení analytické geometrie v prostoru a diferenciální geometrie. Tato kapitola obsahuje velké množství neřešených úloh a také několik řešených příkladů. Všechny neřešené úlohy mají v hranatých závorkách uvedeno řešení. Je možné také nahlédnout do GeoGebra knihy *https://www.geogebra.org/m/z2kfhky3*, v níž jsou vloženy základní úlohy k procvičování analytické geometrie v rovině. Pro usnadnění čtení postupů geometrických konstrukcí je celý text v závěru doplněn přehledovou tabulku se seznamem geometrických symbolů. Pro každý uvedený symbol je zde zmíněn přehled možností označení a také je napsán popis, jak symbol čteme.

Věříme, že studijní materiál přispěje ke správné orientaci nejen v rovinné, ale i v prostorové geometrii a napomůže k následnému úspěšnému zvládnutí studia geometrie na naší univerzitě.

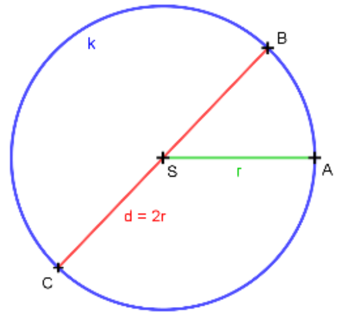
Autorky

1. ROVINNÉ ÚTVARY A JEJICH VLASTNOSTI

1.1 ZÁKLADNÍ ROVINNÉ KŘIVKY

V této podkapitole pojednáme o dvou známých rovinných křivkách (mj. kuželosečkách) – o kružnici a o elipse. Zmíníme jejich definice, u kružnice uvedeme její části a její vzájemné polohy s přímkou. U elipsy uvedeme dva způsoby její konstrukce a také popíšeme vykreslení oskulačních kružnic ve vrcholech elipsy. Dále připomeneme princip sestrojení tečen elipsy v jejím obecném bodě, ale i ve vrcholech.

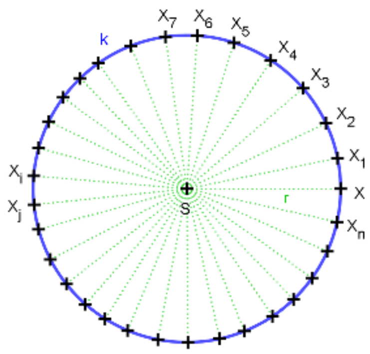
1.1.1 Kružnice



Definice 1.1:

Kružnicí nazýváme množinu všech bodů jedné roviny, které mají konstantní vzdálenost $r > 0$ od pevného bodu S. Bod S se nazývá **střed kružnice**, kladné reálné číslo r nazýváme **poloměr** kružnice. Zapisujeme $k\,(S, r)$. Číslo $2r$ (případně úsečka o délce $2r$ procházející středem kružnice) se nazývá **průměr** kružnice a označuje se d.

Kružnici můžeme definovat ještě např. i následovně:



Definice 1.2:

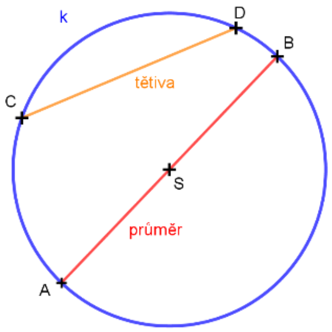
V rovině je dán bod S a kladné reálné číslo r. Množina všech bodů X roviny, pro které platí $|SX| = r$, se nazývá kružnice k se středem S a s poloměrem r.

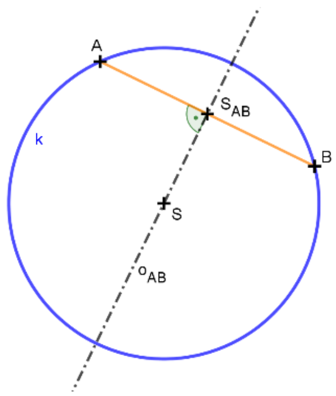
Souměrnost kružnice:

- Kružnice je souměrná podle svého středu S.
- Kružnice je souměrná podle každé přímky p, která prochází jejím středem S.

Tětiva kružnice:

- Úsečka, jejíž oba krajní body leží na kružnici, se nazývá **tětiva** kružnice (průměr je nejdelší tětiva kružnice).
- Osa o_{AB} tětivy AB kružnice $k\,(S, r)$ prochází středem S kružnice k. Obrácené platí, že kolmice o_{AB} vedená středem S kružnice k k její tětivě AB je osou této tětivy, tzn. že tuto tětivu půlí.



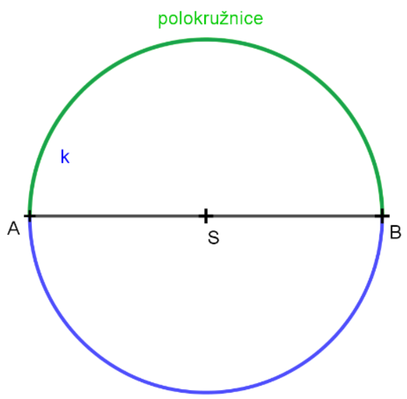


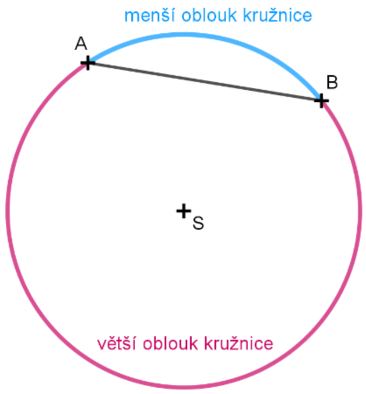
Oblouk kružnice, středový a obvodový úhel:

Obloukem kružnice (**kruhovým obloukem**) nazýváme souvislou část kružnice ohraničenou jejími dvěma různými body, např. body A, B.

- Body A, B se nazývají **krajní body oblouku**.
- Každé dva různé body kružnice dělí kružnici na dva oblouky.
- Je-li úsečka AB průměr kružnice, říkáme oblouku **polokružnice**.

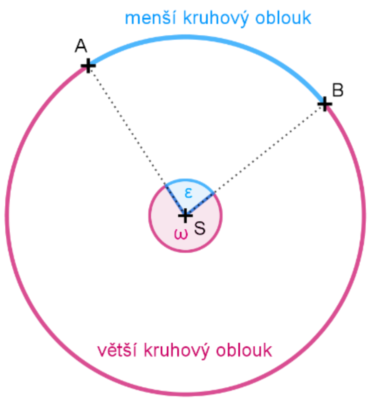
- Není-li úsečka *AB* průměr kružnice, pak oblouk ležící v polorovině *ABS* s hraniční přímkou *AB* se nazývá **větší oblouk kružnice** a zbývající část kružnice je **menší oblouk kružnice**.

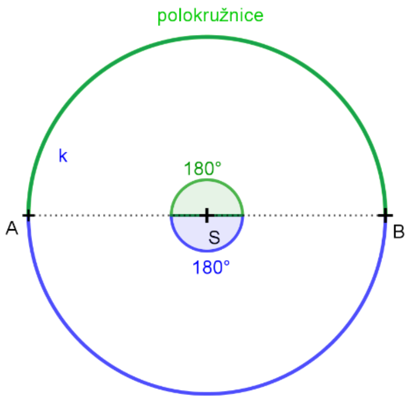




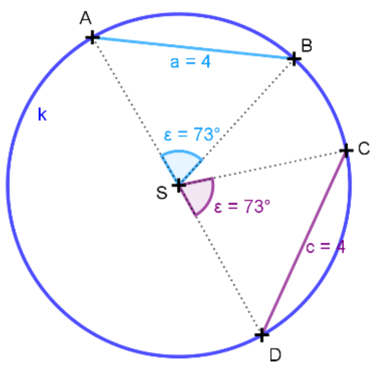
- Menší oblouk leží v konvexním úhlu ∠ *ASB*, který se nazývá **středový úhel příslušný k menšímu oblouku *AB***. K většímu oblouku *AB* přísluší nekonvexní středový úhel ∠ *ASB*. K polokružnici sestrojené nad průměrem *AB* přísluší přímý úhel ∠ *ASB*.

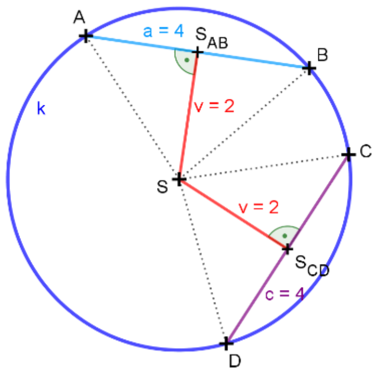
- K tětivě *AB* kružnice přísluší jediný středový úhel:
  - jestliže *AB* není průměr, potom je to úhel ∠ *ASB*;
  - je-li *AB* průměr, pak je to jeden ze zvolených přímých úhlů ∠ *ASB*.



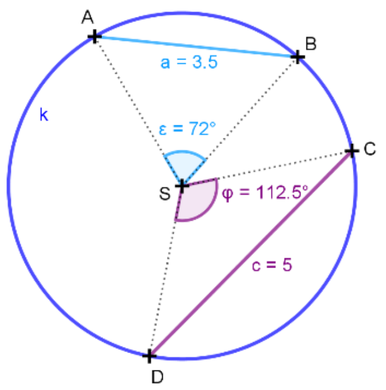


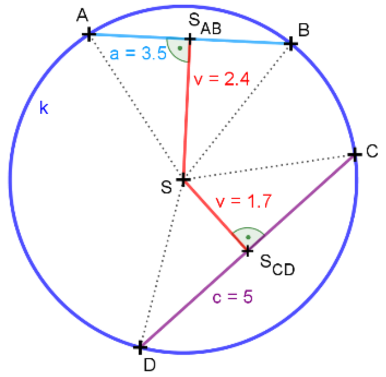
- Ke shodným tětivám *AB* ≡ *A´B´* kružnice *k* (*S, r*) přísluší shodné příslušné středové úhly |∠ *ASB*| ≡ |∠ *A´SB´*|. Obráceně, ke shodným konvexním nebo přímým středovým úhlům kružnice přísluší shodné tětivy.
- Shodné tětivy *AB, A´B´* kružnice *k* (*S, r*) mají od jejího středu *S* vzdálenosti sobě rovné. Obráceně též platí, že pokud dvě tětivy *AB, A´B´* kružnice *k* (*S, r*) mají od jejího středu *S* rovnající se vzdálenosti, pak jsou tětivy *AB, A´B´* shodné.



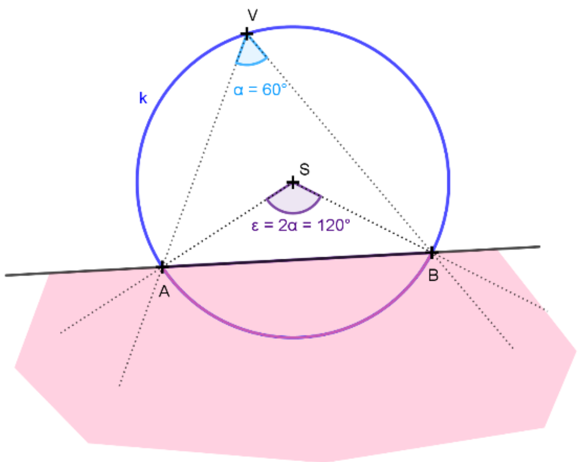


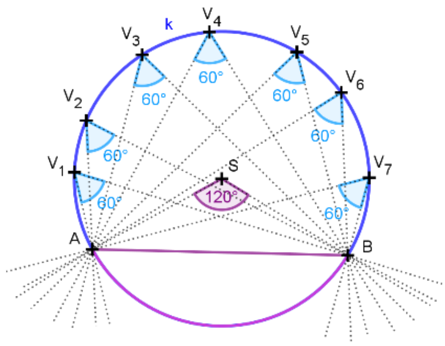
- K větší tětivě kružnice přísluší větší středový úhel. Obráceně, k většímu středovému úhlu přísluší v téže kružnici větší tětiva.
- Čím větší tětiva, tím má od středu *S* kružnice *k* (*S, r*) menší vzdálenost. Obráceně platí, že ta ze dvou tětiv kružnice, která je větší, má od středu *S* kružnice menší vzdálenost.



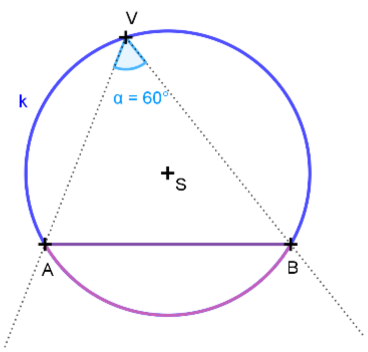


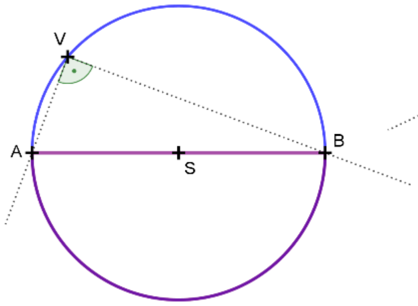
- Buď dána kružnice *k* (*S, r*) a na ní po řadě tři různé body *A, V, B*. Konvexní úhel ∠ *AVB* se nazývá **obvodový úhel** příslušný k tomu oblouku *AB* kružnice *k*, který leží v polorovině opačné k polorovině *ABV* s hraniční přímkou *AB*. Středový úhel ∠ *ASB*, který přísluší k témuž oblouku *AB*, je příslušný středový úhel k danému obvodovému úhlu ∠ *AVB*.
- Všechny obvodové úhly příslušné k témuž oblouku jsou navzájem shodné, velikost každého z nich je rovna polovině příslušného středového úhlu.

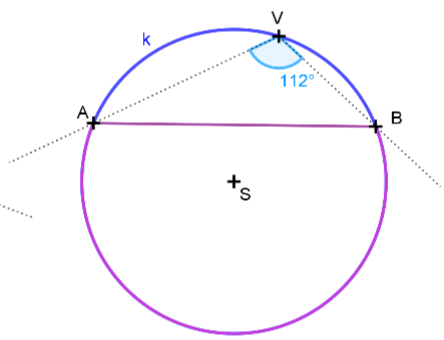




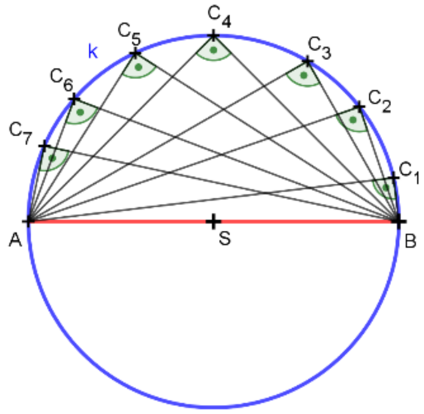
- Obvodové úhly nad menším obloukem jsou ostré, nad polokružnicí jsou pravé a nad větším obloukem jsou tupé. (Odtud plyne známá Thaletova věta).







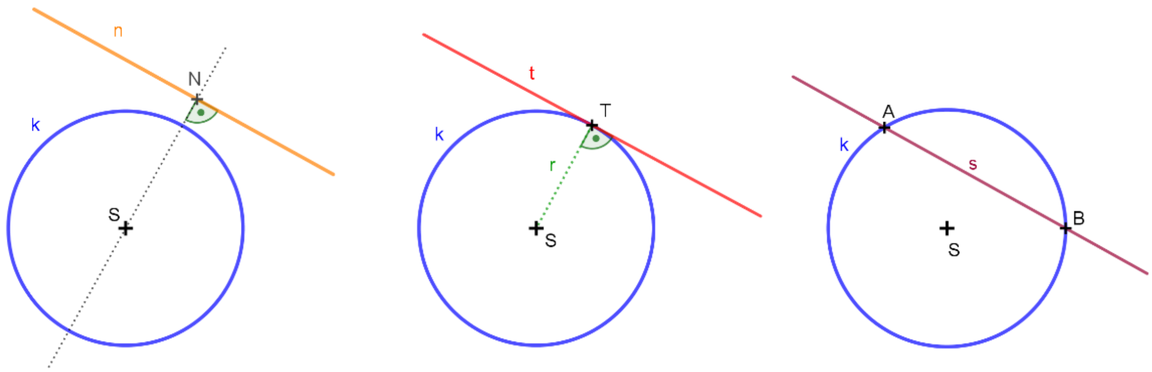
Thaletova věta: Všechny obvodové úhly sestrojené v kružnici nad jejím průměrem jsou pravé.



Vzájemná poloha kružnice a přímky

Přímka *p* může vzhledem ke kružnici *k* zaujímat 3 polohy:

- je **vnější přímkou (nesečnou)** kružnice *k*, nemá-li s kružnicí *k* žádný společný bod;
- je **tečnou** kružnice *k*, má-li s kružnicí *k* společný právě jeden bod (**bod dotyku**);
- je **sečnou** kružnice *k*, má-li s kružnicí *k* společné dva body (**průsečíky**).

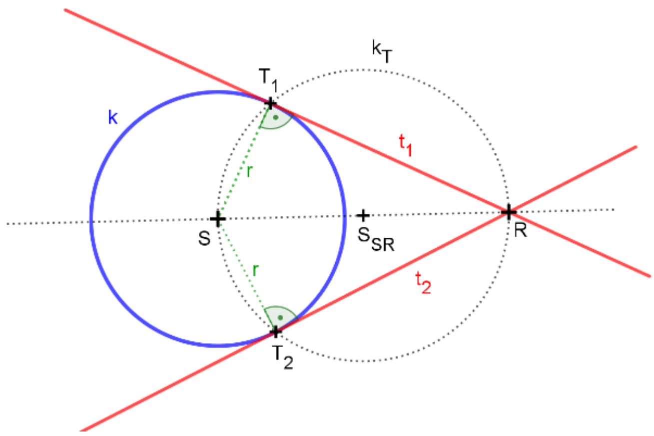


Má-li přímka *p* s kružnicí *k* dva různé společné body, říkáme, že kružnici v těchto dvou bodech **protíná**.

Má-li přímka *p* s kružnicí *k* společný právě jeden bod, říkáme, že se kružnice v tomto bodě **dotýká**.

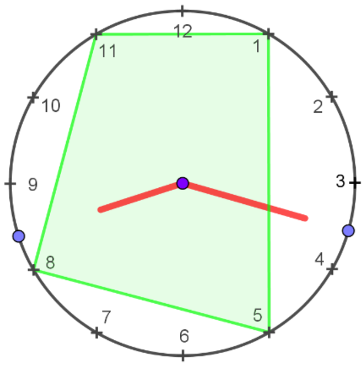
Tečna ke kružnici:

- tečna *t* kružnice *k* (*S, r*) je kolmá k poloměru dotykového bodu *T*, tj. $t \perp ST$;
- v každém bodě kružnice existuje právě jedna tečna;
- z vnějšího bodu lze ke kružnici sestrojit právě dvě tečny.
- Thaletovu větu používáme při konstrukci tečen kružnice z vnějšího bodu.



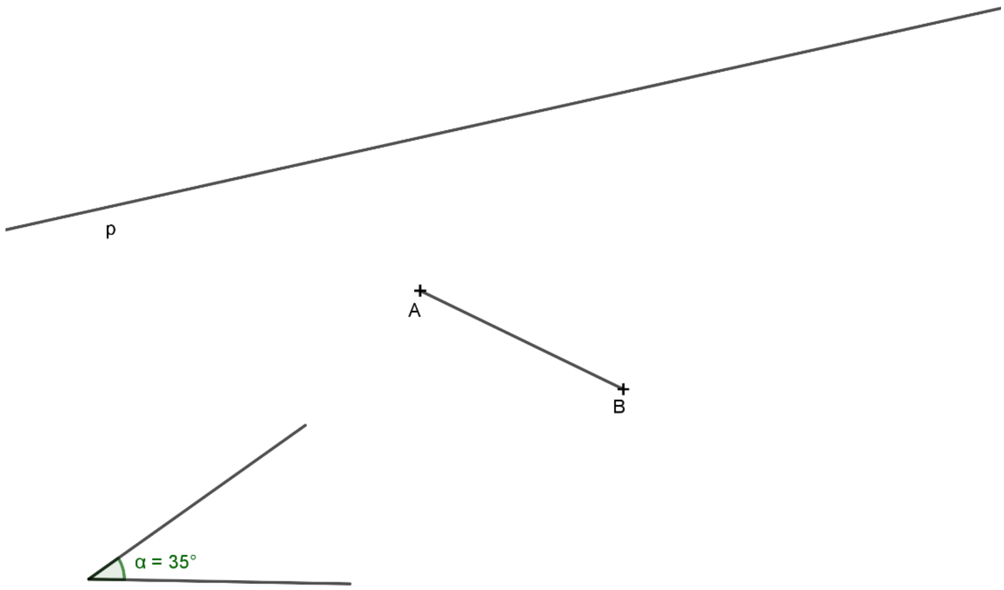
Úloha 1.1:

Na obrázku je zobrazen hodinový ciferník a v něm je sestrojený čtyřúhelník *158(11).* Určete velikosti vnitřních úhlů znázorněného čtyřúhelníku.



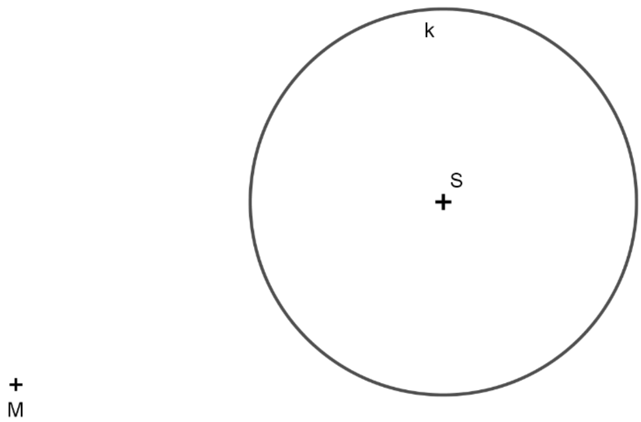
Úloha 1.2:

Na přímce *p* sestrojte bod, z nějž je vidět úsečku *AB* pod úhlem α.



Úloha 1.3:

Z daného bodu *M* sestrojte tečny ke kružnici *k* (*S*, *r*).

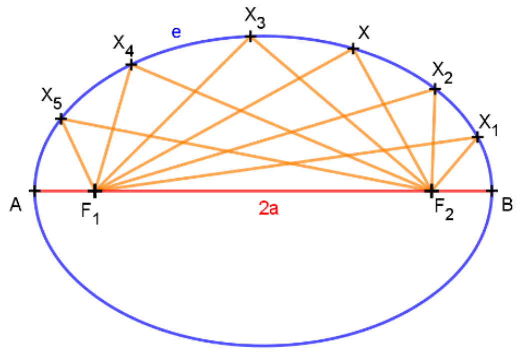


1.1.2 Elipsa

Definice 1.3:

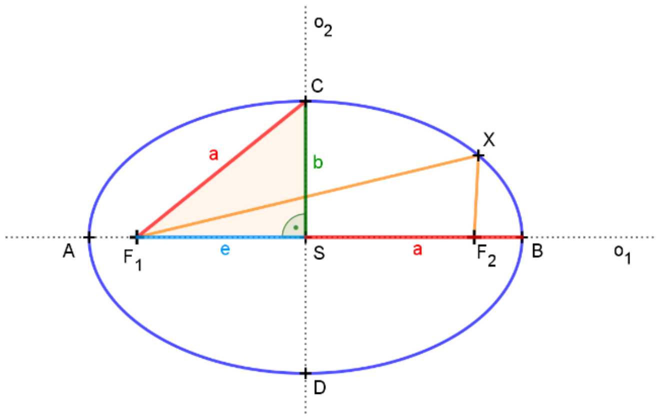
Množinu všech bodů X v rovině (E_2), které mají od dvou různých pevně zvolených bodů F_1, F_2 konstantní součet vzdáleností rovný $2a$, nazýváme **elipsa**. Tj. platí

$$k_e = \{X \in E_2: |XF_1| + |XF_2| = 2a,\ 0 < |F_1F_2| < 2a\}.$$



Základní pojmy spojené s elipsou:

- dané pevné body F_1, F_2 se nazývají **ohniska;**
- spojnicím XF_1, XF_2 říkáme **průvodiče**;
- střed S úsečky F_1F_2 je **střed elipsy**;
- vzdálenost ohnisek od středu elipsy se nazývá **excentricita** (**lineární výstřednost**) a označuje se $e = |SF_1| = |SF_2|$;
- body $A, B,$ v nichž přímka F_1F_2 protíná elipsu, jsou tzv. **hlavní vrcholy**;
- přímku $o_1 \equiv AB$ nazýváme **hlavní osa** (nemůže-li dojít k záměně, označujeme týmž názvem i velikost úsečky AB, tj. $|AB| = 2a$). Délku $|SA| = |SB| = a$ nazveme **hlavní poloosa**;
- body $C, D,$ ve kterých osa úsečky F_1F_2 protíná elipsu, jsou tzv. **vedlejší vrcholy;**
- přímku $o_2 \equiv CD$ nazýváme **vedlejší osa** (nemůže-li dojít k záměně – označujeme týmž názvem i velikost úsečky CD, tj. $|CD| = 2b$). Délku $|SC| = |SD| = b$ nazveme **vedlejší poloosa**;
- pro vedlejší vrcholy C, D platí, že $|F_1C| = |F_2C| = |F_1D| = |F_2D| = a;$
- pravoúhlý trojúhelník F_iSC, resp. F_iSD ($i = 1, 2$) je tzv. **charakteristický trojúhelník** elipsy s odvěsnami b, e a s přeponou a, a proto $a^2 = b^2 + e^2$.



Poznámka:

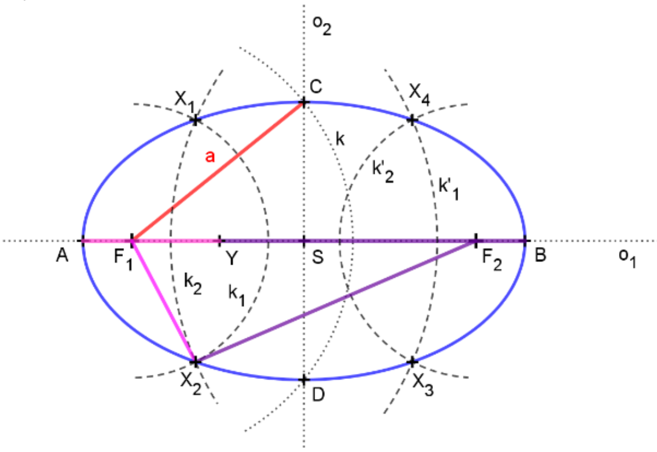
Kdybychom v definici elipsy připustili i možnost, že ohniska F_1, F_2 splynou, potom by se mezi elipsy zařadila i kružnice jakožto speciální případ elipsy s nulovou excentricitou.

Z definice elipsy bezprostředně vyplývá její **bodová konstrukce**:

Zadání: Elipsa je dána ohnisky F_1, F_2 a úsečkou o velikosti hlavní poloosy a, pro niž platí, že $a > \frac{|F_1F_2|}{2}$.

Elipsu zkonstruujeme pomocí bodové konstrukce následovně, tj. sestrojíme:

1) hlavní osu $o_1 \equiv F_1F_2$;
2) střed S úsečky F_1F_2, který je středem elipsy;
3) hlavní vrcholy A, B elipsy, které leží na hlavní ose o_1 ve vzdálenosti a od středu S elipsy;
4) osu o_2 úsečky F_1F_2, která je vedlejší osou elipsy;
5) kružnici k (F_1,$|AS|$);
6) body C, D (vedlejší vrcholy) jako průsečíky kružnice k a vedlejší osy o_2;
7) na úsečce F_1F_2 zvolíme libovolný bod Y (její vnitřní bod);
8) kružnice k_1 (F_1,$|AY|$), k'_1 (F_1,$|YB|$), k_2 (F_2,$|YB|$) a k'_2 (F_2,$|AY|$);
9) body $\{X_1, X_2\} \equiv k_1 \cap k_2$, $\{X_3, X_4\} \equiv k'_1 \cap k'_2$, ve kterých se kružnice protínají, jsou body elipsy;
10) různou volbou bodu Y a opakováním kroků 8 a 9 pro nově zvolené body Y získáme různé poloměry kružnic a tím i další body elipsy.

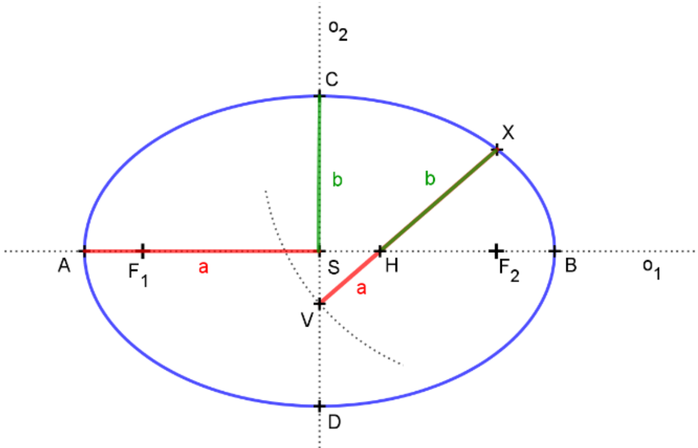


Souměrnosti elipsy:

- na základě bodové konstrukce je patrné, že elipsa je osově souměrná podle přímky F_1F_2 i podle osy úsečky F_1F_2 a středově souměrná podle středu úsečky F_1F_2

Rozdílová proužková konstrukce elipsy:

Princip konstrukce: Na proužek papíru s přímým okrajem vyznačíme kolineární body V, H a X tak, aby platilo $|VX| = a$, $|HX| = b$ (tj. $|VH| = |a - b|$= konst.). Nyní pohybujeme proužkem papíru tak, aby bod V ležel stále na vedlejší ose a bod H současně na hlavní ose; potom bod X je bodem elipsy.



Rozdílové proužkové konstrukce užíváme v případě, kdy je elipsa určena hlavní osou AB, kde $|AB| = 2a$, bodem elipsy X, a kdy chceme sestrojit velikost vedlejší poloosy $b = |CS|$. Postupujeme při ní následovně, tj. sestrojíme:

1) střed S úsečky AB, který je středem elipsy;
2) osu o_2 úsečky AB, která je vedlejší osou elipsy;
3) kružnici k (X, $a = |AS|$)
4) bod V jako průsečík kružnice k a osy o_2 ležící v polorovině opačné k polorovině $\rightarrow ABX$ s hraniční přímkou $o_1 \equiv AB$;
5) bod H jako průsečík polopřímky XV s úsečkou AB;
6) velikost úsečky XH je rovna velikosti b vedlejší poloosy elipsy.

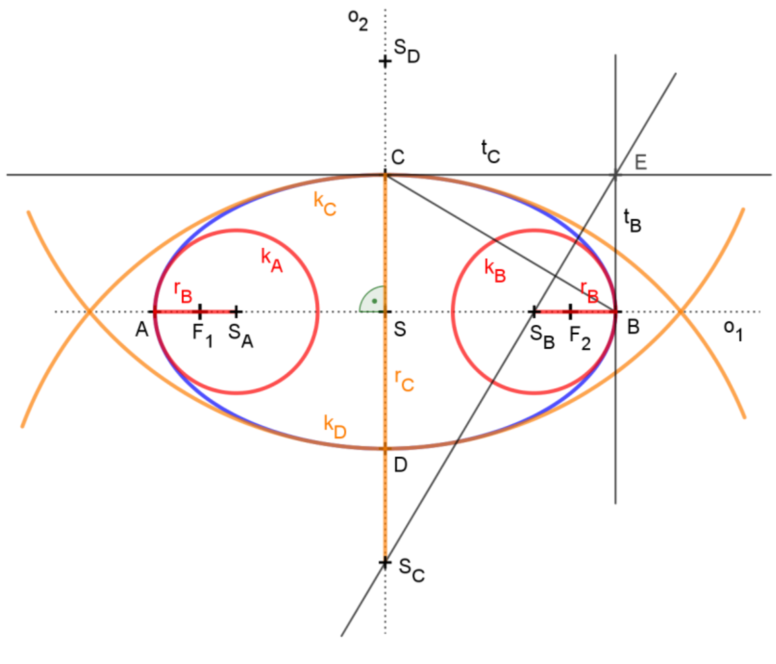
Oskulační kružnice ve vrcholech elipsy

Při praktickém sestrojování elipsy nahrazujeme elipsu v okolí jejích hlavních, resp. vedlejších vrcholů tzv. oskulačními kružnicemi, tj. kružnicemi, které se ve vrcholech elipse co nejvíce přibližují. Každá kružnice, která se dotýká elipsy např. v bodě *B*, ji přibližně v blízkém okolí tohoto vrcholu nahrazuje. Analogicky pro zbývající vrcholy (ale i všechny ostatní body) elipsy.

Zadání: Elipsa je dána hlavním vrcholem *A*, vedlejším vrcholem *C* a svým středem *S.*

Následuje popis konstrukce oskulačních kružnic k_A, k_B v hlavních vrcholech elipsy a oskulačních kružnic k_C, k_D ve vedlejších vrcholech elipsy. Tj. postupně sestrojíme:

1) hlavní vrchol *B* jako obraz hlavního vrcholu *A* ve středové souměrnosti se středem *S*;
2) vedlejší vrchol *D* jako obraz vedlejšího vrcholu *C* ve středové souměrnosti se středem *S*;
3) tečna t_C sestrojená k elipse v jejím vedlejším vrcholu *C,* tj. $C \in t_C \wedge t_C \,//\, AB$;
4) tečna t_B sestrojená k elipse v jejím hlavním vrcholu *B,* tj. $B \in t_B \wedge t_B \,//\, CD$;
5) bod $E \equiv t_B \cap t_C$ jako průsečík tečen t_B, t_C;
6) kolmice *k* vedená bodem *E* k přímce *BC*;
7) střed S_B oskulační kružnice v hlavním vrcholu *B* jako průsečík kolmice *k* a úsečky *AB*;
8) střed S_C oskulační kružnice ve vedlejším vrcholu *C* jako průsečík kolmice *k* a osy *CD*;
9) oskulační kružnice v hlavním vrcholu *B* je kružnice $k_B(S_B,\ r_B = |S_B B|)$;
10) oskulační kružnice ve vedlejším vrcholu *C* je kružnice $k_C(S_C,\ r_C = |S_C C|)$;
11) oskulační kružnice k_A $(S_A,\ r_A = |S_B B|)$ je středově souměrná s oskulační kružnicí k_B podle středu elipsy *S;*
12) oskulační kružnice k_D $(S_D,\ r_D = |S_C C|)$ je středově souměrná s oskulační kružnicí k_C podle středu elipsy *S.*

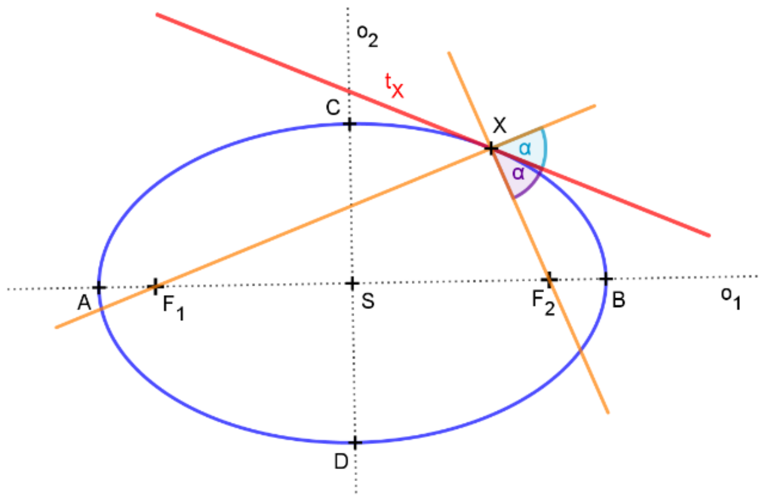


Poznámka:
Při praktické konstrukci elipsy narýsujeme nejprve v okolí hlavních a vedlejších vrcholů elipsy oblouky oskulačních kružnic. Dále např. pomocí bodové konstrukce najdeme několik dalších bodů elipsy a pak dokreslíme (např. s využitím křivítka) oblouky elipsy procházející sestrojenými body a dotýkající se oblouků oskulačních kružnic.

Tečny k elipse v jejím libovolném bodě

Ze čtyř úhlů, které tvoří průvodiče bodu X elipsy, vždy jeden obsahuje střed elipsy – tento úhel a úhel s ním vrcholový se nazývají **vnitřní úhly průvodičů**. Úhly vedlejší k vnitřním úhlům nazýváme **vnější úhly průvodičů**.

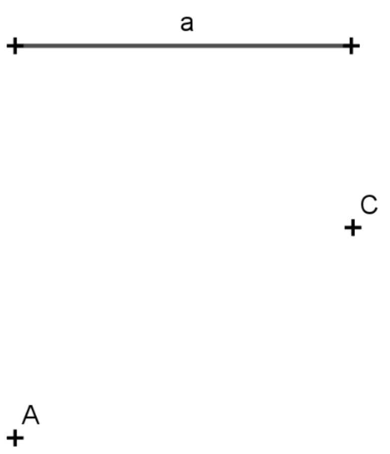
Tečna t_X elipsy sestrojená v jejím libovolném bodě X půlí vnější úhel průvodičů F_1X a F_2X.



Tečna ve vrcholu elipsy čili vrcholová tečna je kolmá k ose, na níž příslušný vrchol leží.

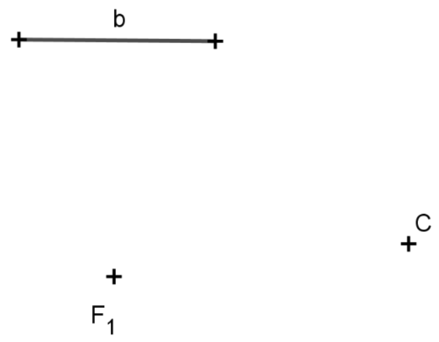
__Úloha 1.4:__

Sestrojte elipsu danou vrcholy A, C a délkou hlavní poloosy a.



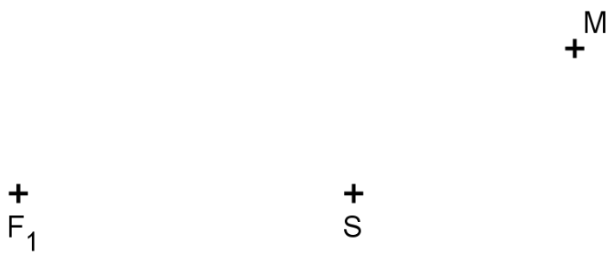
Úloha 1.5:

Sestrojte elipsu danou ohniskem F_1, vedlejším vrcholem C a délkou vedlejší poloosy b.



Úloha 1.6:

Sestrojte elipsu danou ohniskem F_1, středem S a obecným bodem M elipsy.



Úloha 1.7:

Sestrojte elipsu danou ohnisky F_1, F_2 a obecným bodem M elipsy.

1.2 ROVINNÉ OBRAZCE

Tato podkapitola je věnována základním rovinným obrazcům. Jsou uvedeny jejich definice, shrnuty jejich základní vlastnosti, u některých z nich jsou uvedeny jejich speciální případy. V závěru podkapitoly jsou popsány konstrukce vybraných pravidelných mnohoúhelníků.

1.2.1 Kruh

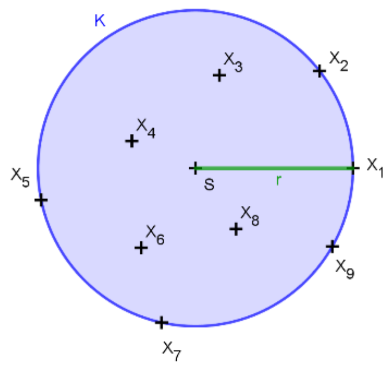
Definice 1.4:

Kruhem nazýváme množinu všech bodů v rovině, jejichž vzdálenost od středu S je menší než poloměr $r > 0$, $r \in \mathbf{R}$, nebo je rovna poloměru r kružnice k (S, r). Kružnici k nazýváme **hraniční kružnicí** kruhu K (S, r).

Kruh může být definován ještě i jiným způsobem, např. následovně:

Definice 1.5:

V rovině je dán bod S a kladné reálné číslo r. Množina všech bodů X roviny, pro které platí, $|SX| \leq r$, se nazývá kruh K se středem S a s poloměrem r.



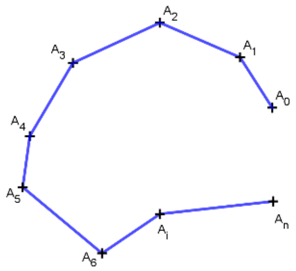
1.2.2 Mnohoúhelník

Pojem mnohoúhelník je možné zavést několika různými způsoby, dále uvedeme některé z nich.

Definice 1.6:
Mnohoúhelník (též ***n-úhelník***) je část roviny vymezená úsečkami, které spojují určitý počet bodů (nejméně tři), z nichž žádné tři neleží na jedné přímce.

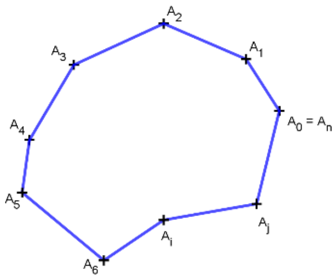
Poznámka:

Nechť jsou v rovině dány body $A_0, A_1, \dots, A_n$, kde $n \in \mathbf{N}$, a nechť sousední úsečky A_iA_{i+1}, $A_{i+1}A_{i+2}$, kde $i \in \mathbf{N}$, mají společný pouze jeden krajní bod A_{i+1}, pak sjednocení úseček A_0A_1, A_1A_2, …, $A_{n-1}A_n$ nazveme **lomená čára** $A_0A_1 \dots A_n$.



Body $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ označujeme jako **vrcholy lomené čáry**. Úsečky A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{n-1}A_n$ nazýváme **stranami lomené čáry**.

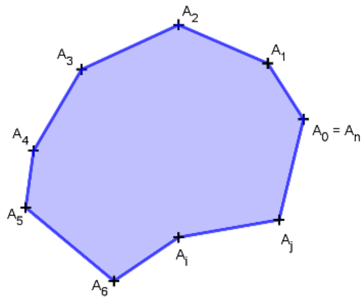
Jestliže $A_0 \equiv A_n$, pak sjednocení úseček A_0A_1, A_1A_2, …, $A_{n-1}A_n$, kde $n \in \mathbf{N}$, nazveme **uzavřená lomená čára** $A_1A_2 \dots A_n$.



Jestliže žádné dvě nesousední úsečky nemají společný bod, pak sjednocení těchto úseček nazveme **jednoduchá uzavřená lomená čára** $A_1A_2 \dots A_n$.

Jednoduchá uzavřená lomená čára rozdělí body roviny na dvě podmnožiny **–** vnitřní a vnější oblast.

Definice 1.7:
Sjednocení jednoduché uzavřené lomené čáry $A_0A_1 \dots A_n$ ($A_0 \equiv A_n$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$) s její vnitřní oblastí se nazývá ***mnohoúhelník*** (***n-úhelník***) $A_1A_2 \dots A_n$.



Definice 1.8:
Mnohoúhelník (***n-úhelník***) je omezená část roviny ohraničená jednoduchou uzavřenou lomenou čárou.

1.2.2.1 Základní pojmy spojené s mnohoúhelníkem

S mnohoúhelníkem jsou spojeny následující pojmy:

- **vrcholy** mnohoúhelníku – body, které určují mnohoúhelník (body $A_1, A_2, \dots$)
- **strany** mnohoúhelníku – úsečky spojující sousední vrcholy (úsečky A_1A_2, A_2A_3, …, A_iA_{i+1}, …, A_nA_1)
- **úhlopříčky** mnohoúhelníku – úsečky spojující nesousední vrcholy (úsečky A_1A_3, …, A_iA_j, kde $j \neq i+1$, $i, j \in \mathbf{N}$)
- **vnitřní úhly** mnohoúhelníku – úhly, které svírají sousední strany (úhly $\angle A_1A_2A_3$, …, $\angle A_iA_{i+1}A_{i+2}$, $i \in \mathbf{N}$)

Součet velikostí vnitřních úhlů $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ mnohoúhelníku (n- úhelníku), kde $n \in \mathbf{N}$, určíme na základě platnosti vztahu

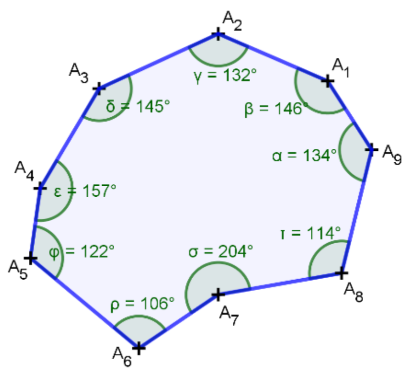
$$\alpha + \beta + \gamma + \dots = \pi\,(n-2)\ \text{rad}.$$

Pokud bychom chtěli vyjádřit součet velikostí vnitřních úhlů ve stupňové míře, pak použijeme převodního vztahu, v němž platí, že

$$1\ \text{rad} \approx 57°\,17'45''.$$

<u>**Vzorový příklad:**</u> V případě devítiúhelníku je součet velikostí jeho vnitřních úhlů roven

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \varphi + \rho + \sigma + \tau = 7\pi\ \text{rad} \approx 1260°.$$

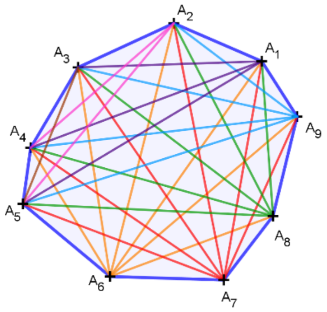


Počet úhlopříček obecného mnohoúhelníku (n-úhelníku), kde $n \in \mathbf{N}$, určíme ze vztahu

$$u = \frac{1}{2} n (n - 3).$$

Vzorový příklad: V případě devítiúhelníku je počet úhlopříček roven

$$u = 27.$$



Obvodem mnohoúhelníku rozumíme délku jednoduché uzavřené lomené čáry, která mnohoúhelník v rovině ohraničuje.

Obvod o mnohoúhelníku se tedy vypočte jako součet délek všech jeho stran, tj.

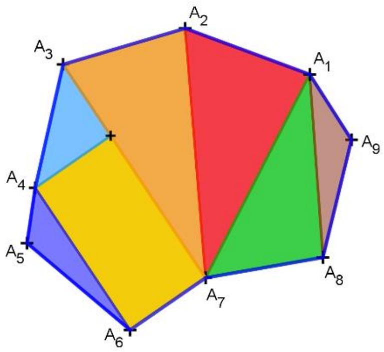
$$o = |A_1A_2| + |A_2A_3| + \ldots + |A_iA_{i+1}| + \ldots + |A_nA_1| = a + b + c + \ldots + z,$$

kde $a = |A_1A_2|$, $b = |A_2A_3|$, …, $z = |A_nA_1|$ jsou délky jednotlivých stran mnohoúhelníku (n- úhelníku), $n \in \mathbf{N}$.

Obsahem mnohoúhelníku rozumíme velikost ohraničené plochy, kterou tento mnohoúhelník v rovině zabírá.

Obsah S mnohoúhelníku se vypočte pomocí rozložení mnohoúhelníku na vhodné, vzájemně se nepřekrývající trojúhelníky, obdélníky nebo čtverce, jejichž obsahy S_1, S_2, S_3, … se vypočítají podle známých vzorců a tyto obsahy se následně sečtou, tj.

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots .$$



Poznámka:

Počet vrcholů, stran a vnitřních úhlů je v jednom mnohoúhelníku stejný. Tento počet určuje název mnohoúhelníku, např. trojúhelník (3 vrcholy, 3 strany a 3 vnitřní úhly), čtyřúhelník (4 vrcholy, 4 strany a 4 vnitřní úhly), pětiúhelník (5 vrcholů, 5 stran a 5 vnitřních úhlů), … .

1.2.2.2 Znázornění a zápis mnohoúhelníku

Mnohoúhelník se znázorňuje pomocí jeho vrcholů a stran, označuje se výčtem vrcholů v jejich přesném pořadí. U speciálních mnohoúhelníků (trojúhelník, čtverec, pětiúhelník, šestiúhelník, …) se v zápise před výčet vrcholů umísťuje příslušný symbol (△, ☐, ⬟, ⬣, …). Vrcholy, strany a vnitřní úhly mnohoúhelníku se zapisují stejným způsobem jako body, úsečky a úhly.

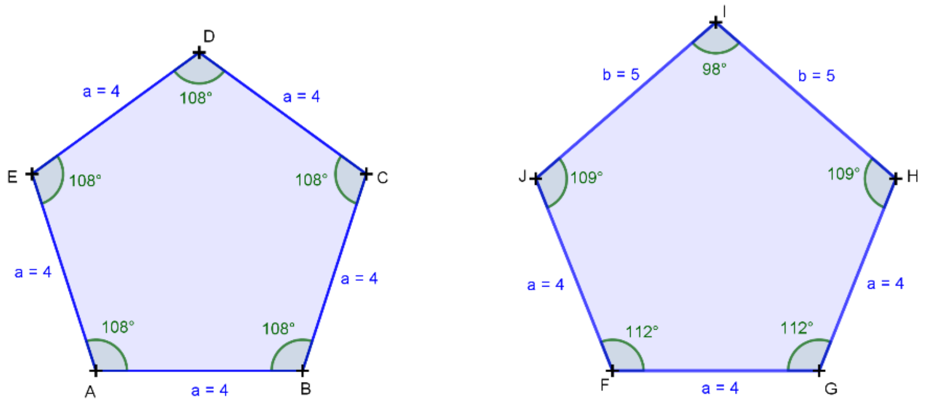
Příklad zápisu šestiúhelníku a jeho jednotlivých prvků:

- šestiúhelník … ⬣ *ABCDEF*
- vrcholy … *A, B, C, D, E, F*
- strany … *AB, BC, CD, DE, EF, FA*
- úhlopříčky … *AC, AD, AE, BD, BE, BF, CE, CF, DF*
- vnitřní úhly … $\angle FAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDE$, $\angle DEF$, $\angle EFA$

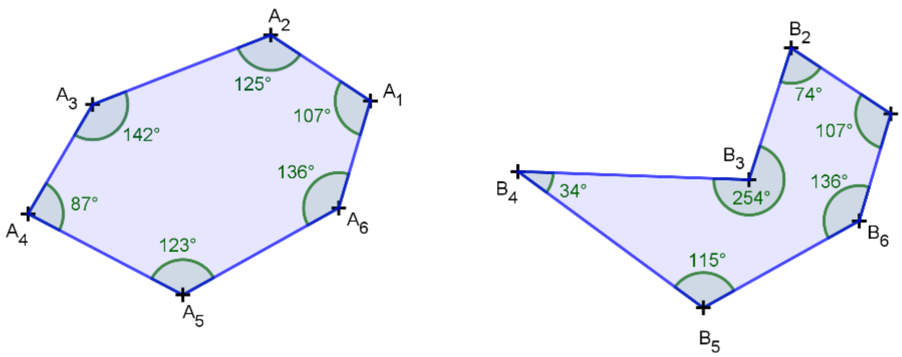
1.2.2.3 Druhy mnohoúhelníků

Kromě mnohoúhelníků, lišících se počtem vrcholů, resp. počtem stran či vnitřních úhlů, se mnohoúhelníky mohou dělit podle následujících kritérií:

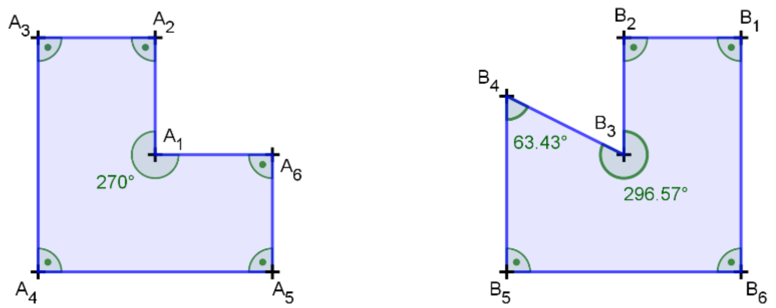
a) **délka stran a velikost vnitřních úhlů mnohoúhelníku**
   a1) **pravidelné** (všechny strany i vnitřní úhly jsou shodné)
   a2) **nepravidelné** (alespoň jedna strana je různě dlouhá než ostatní strany nebo alespoň jeden vnitřní úhel je jinak velký než ostatní vnitřní úhly)



b) **konvexnost/nekonvexnost vnitřních úhlů mnohoúhelníku**
   b1) **konvexní** (všechny vnitřní úhly jsou menší než 180°)
   b2) **nekonvexní** (alespoň jeden vnitřní úhel je větší než 180°)

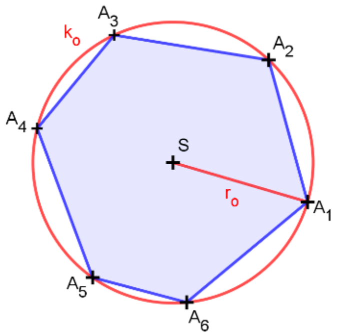


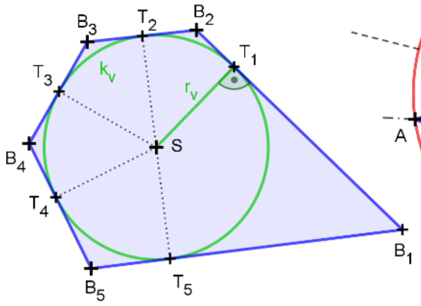
c) **vnitřní úhly mnohoúhelníku jsou pravé/různé od pravých úhlů či úhlů o velikosti 270°**
   c1) **pravoúhelníky** (všechny vnitřní úhly jsou pravé, případně rovny 270°)
   c2) **nepravoúhelníky** (alespoň jeden vnitřní úhel se nerovná pravému úhlu)

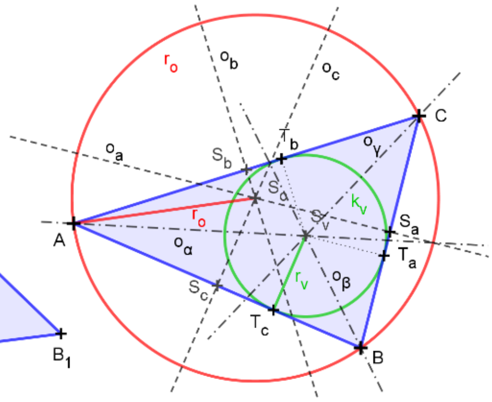


d) **mnohoúhelníky, jimž je možné kružnici opsat/vepsat**
   d1) **tětivové mnohoúhelníky** (takové mnohoúhelníky, jimž lze opsat kružnici; tj. existuje taková kružnice, na níž leží všechny vrcholy daného mnohoúhelníku. Říkáme, že je tato kružnice mnohoúhelníku opsaná. Strany tětivového mnohoúhelníku jsou tětivami kružnice mnohoúhelníku opsané.)

d2) **tečnové mnohoúhelníky** (takové mnohoúhelníky, jimž lze vepsat kružnici; tj. existuje kružnice taková, kterou lze mnohoúhelníku vepsat. Všechny strany mnohoúhelníku se kružnice dotýkají a jsou zároveň tečnami kružnice mnohoúhelníku vepsané.)





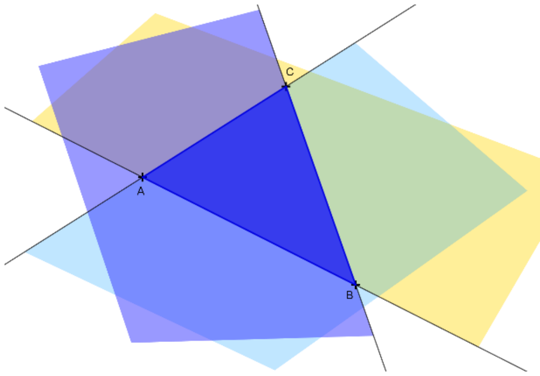


d3) **dvojstředové mnohoúhelníky** (takové mnohoúhelníky, jimž lze opsat i vepsat kružnici, přitom středy obou kružnic mohou, ale nemusí splývat. Příkladem dvojstředového mnohoúhelníku jsou např. obecný trojúhelník, ostroúhlý trojúhelník, rovnoramenný trojúhelník, rovnostranný trojúhelník, čtverec a každý pravidelný *n*-úhelník.)

1.2.3 Trojúhelník

Definice 1.9:

Jsou-li v rovině dány tři nekolineární body *A, B, C*, potom průnik polorovin *ABC, BCA* a *CAB* se nazývá **trojúhelník *ABC***.



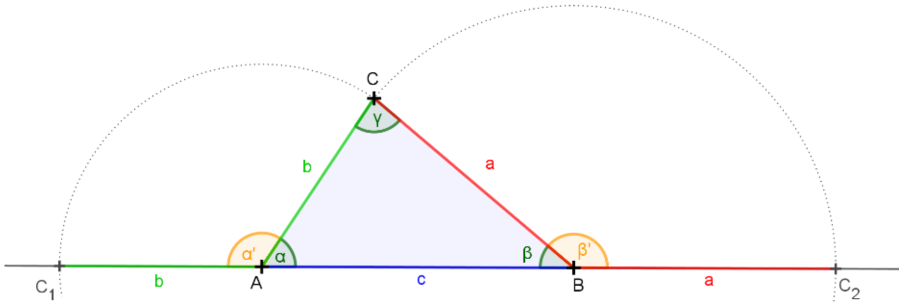
Znázornění a zápis trojúhelníku:

Trojúhelník se znázorňuje pomocí jeho vrcholů a stran. Vrcholy se označují velkým tiskacím písmenem, strany se označují malým písmenem odpovídajícím protějšímu vrcholu, úhly se označují malým písmenem řecké abecedy. Trojúhelník se zapisuje symbolem Δ následovaným výčtem všech tří jeho vrcholů, tj. např. Δ *ABC*.

Základní pojmy související s trojúhelníkem:

- body *A, B, C* se nazývají **vrcholy** trojúhelníku,
- úsečky spojující sousední vrcholy, tj. úsečky *a = BC*, *b = AC* a *c = AB,* se nazývají **strany** trojúhelníku,
- úhly, které svírají strany trojúhelníku, se nazývají **vnitřní úhly** trojúhelníku *ABC;* jsou to úhly $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle BCA$,
- úhly vedlejší k vnitřním úhlům trojúhelníku se nazývají **vnější úhly** trojúhelníku,
- každý trojúhelník má 3 vrcholy, 3 strany, 3 vnitřní úhly a 6 vnějších úhlů (u každého vrcholu dva shodné vnější úhly),
- trojúhelník nemá úhlopříčky,

- sjednocení stran trojúhelníku tvoří jeho **obvod**. Obvod *o* trojúhelníku vypočteme součtem délek jeho stran, tj. $o = a + b + c,$



- body trojúhelníku nenáležící jeho obvodu jsou **body vnitřku trojúhelníku**, body nenáležící trojúhelníku jsou body vnějšku trojúhelníku,
- **obsah** *S* trojúhelníku se vypočte jako polovina součinu délky libovolné strany a k ní příslušné výšky, tj.

$$S = \frac{1}{2}\, a\, v_a = \frac{1}{2}\, b\, v_b = \frac{1}{2}\, c\, v_c\,.$$

Konstrukce trojúhelníku:

Pro úspěšné sestrojení trojúhelníku je nutné, aby vždy platila tzv. **trojúhelníková nerovnost**: *„Součet délek dvou menších stran trojúhelníku je větší než délka třetí strany téhož trojúhelníku.“*

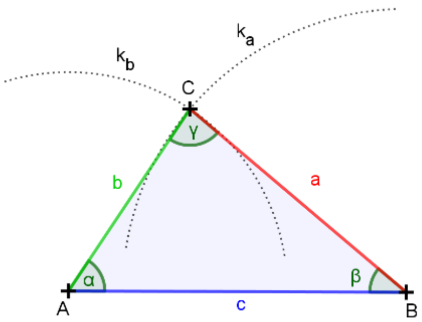
Je-li dán Δ *ABC* se stranami *a, b, c*, pak trojúhelníkovou nerovnost můžeme symbolicky zapsat následovně:

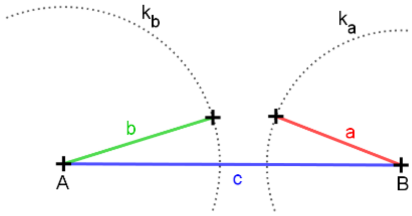
$$a + b > c,\; a + c > b \quad \text{nebo} \quad b + c > a.$$

Důsledkem trojúhelníkové nerovnosti je tvrzení: *„Rozdíl délek dvou stran trojúhelníku je menší než délka třetí strany téhož trojúhelníku.“*

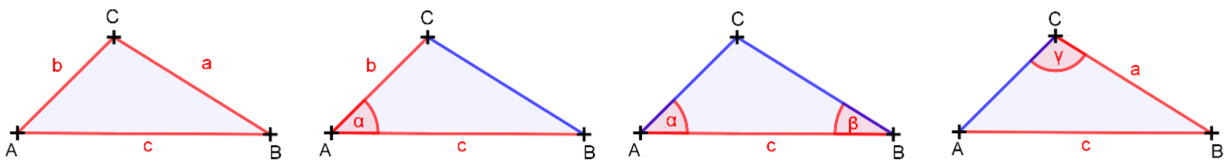
Je-li dán Δ *ABC* se stranami *a, b, c*, pak důsledek trojúhelníkové nerovnosti můžeme symbolicky zapsat ve tvaru:

$$|a - b| < c,\; |a - c| < b \text{ nebo } |b - c| < a.$$





Trojúhelník může být určen:
- délkou všech tří jeho stran (věta **sss**),
- délkou dvou jeho stran a velikostí úhlu, který tyto dvě jeho strany svírají (věta **sus**),
- délkou jedné jeho strany a velikostmi úhlů, které k této jeho jedné straně přiléhají (věta **usu**),
- délkou dvou jeho stran a velikostí úhlu proti větší z nich (věta **Ssu**).



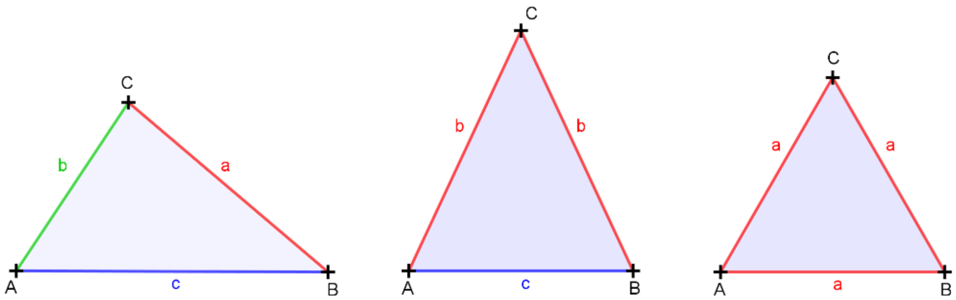
Ke konstrukci trojúhelníku se mohou použít ale i výšky, těžnice, poloměr kružnice trojúhelníku opsané či vepsané atd.

Vlastnosti trojúhelníku:

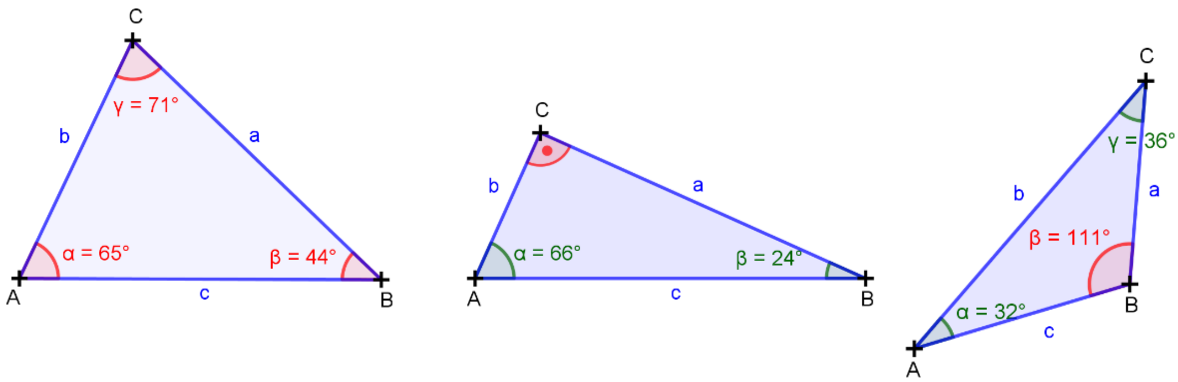
- součet velikostí všech *vnitřních úhlů* je v každém trojúhelníku 180°,
- součet vnitřního a příslušného vnějšího úhlu trojúhelníku je 180°,
- součet dvou vnitřních úhlů se rovná vnějšímu úhlu u zbývajícího vrcholu téhož trojúhelníku,
- proti většímu úhlu leží delší strana trojúhelníku.

Druhy trojúhelníků

- **podle velikostí stran:**
  - **různostranné/obecné** (žádné dvě strany trojúhelníku nejsou shodné, tj. např. $a \neq b \neq c$)
  - **rovnoramenné** (dvě strany trojúhelníku jsou navzájem shodné, ale nejsou shodné s jeho třetí stranou, tj. např. $a = b \neq c$)
  - **rovnostranné** (všechny tři strany trojúhelníku jsou navzájem shodné, tj. např. $a = b = c$)

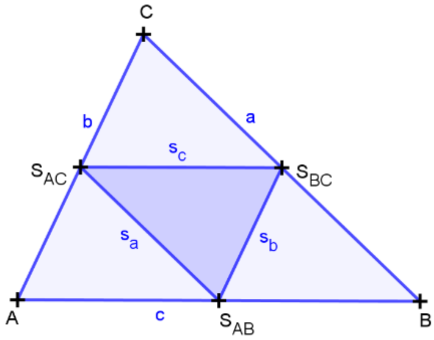


- **podle velikostí vnitřních úhlů:**
  - **ostroúhlé** (všechny vnitřní úhly trojúhelníku jsou ostré, tj. např. $\alpha, \beta, \gamma < 90°$)
  - **pravoúhlé** (jeden vnitřní úhel trojúhelníku je pravý, zbývající dva vnitřní úhly trojúhelníku jsou ostré, tj. např. $\alpha, \beta < 90°$, $\gamma = 90°$)
  - **tupoúhlé** (jeden vnitřní úhel trojúhelníku je tupý, zbývající dva vnitřní úhly trojúhelníku jsou ostré, tj. např. $\alpha, \gamma < 90°$, $\beta > 90°$)



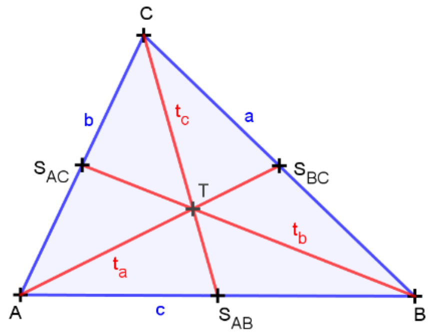
Důležité úsečky, přímky a body v trojúhelníku:

- **střední příčka**



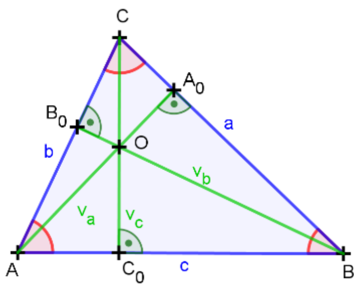
  - **střední příčka** je spojnice středů dvou stran trojúhelníku,
  - každý trojúhelník má tři střední příčky,
  - střední příčka je rovnoběžná se stranou, jejímž středem neprochází, a má délku rovnou polovině délky této strany,
  - střední příčky rozdělují trojúhelník na čtyři shodné trojúhelníky – tzv. **příčkový trojúhelník** a tři trojúhelníky při jednotlivých vrcholech,
  - těžiště trojúhelníku je zároveň těžištěm jeho příčkového trojúhelníku,
  - střední příčky se zpravidla označují malým písmenem *s*.

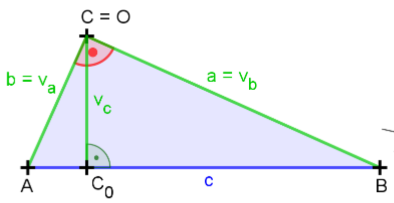
- **těžnice a těžiště**

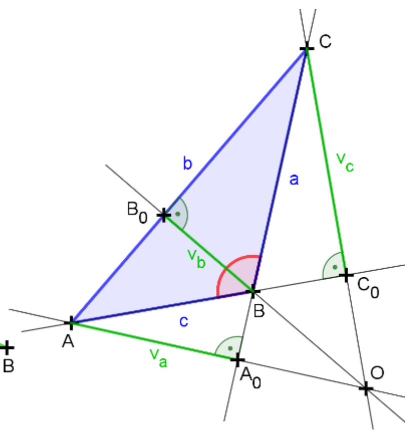


  - **těžnice** trojúhelníku je úsečka spojující vrchol trojúhelníku se středem protější strany;
  - každý trojúhelník má právě tři těžnice, značíme např. t_a, t_b, t_c;
  - těžnice se protínají v jednom bodě, který se nazývá **těžiště**;
  - těžiště se označuje písmenem T;
  - těžiště vždy náleží vnitřku trojúhelníku;
  - těžiště rozděluje každou těžnici na dva díly v poměru 2 : 1, přitom vzdálenost těžiště od vrcholu trojúhel-níku je dvojnásobek vzdálenosti těžiště od středu protější strany, tj. např. $|TA| = 2|S_{BC}T|$, $|TB| = 2|S_{AC}T|$ nebo $|TC| = 2|S_{AB}T|$. Jinými slovy řečeno, vzdálenost těžiště od vrcholu je rovna dvěma třetinám délky příslušné těžnice;
  - každá těžnice rozděluje trojúhelník na dvě části se *stejným obsahem*;
  - těžiště a dva vrcholy trojúhelníku tvoří postupně tři trojúhelníky ($\Delta\, ABT$, $\Delta\, ACT$, $\Delta\, CBT$), všechny tři trojúhelníky mají *stejný obsah*.

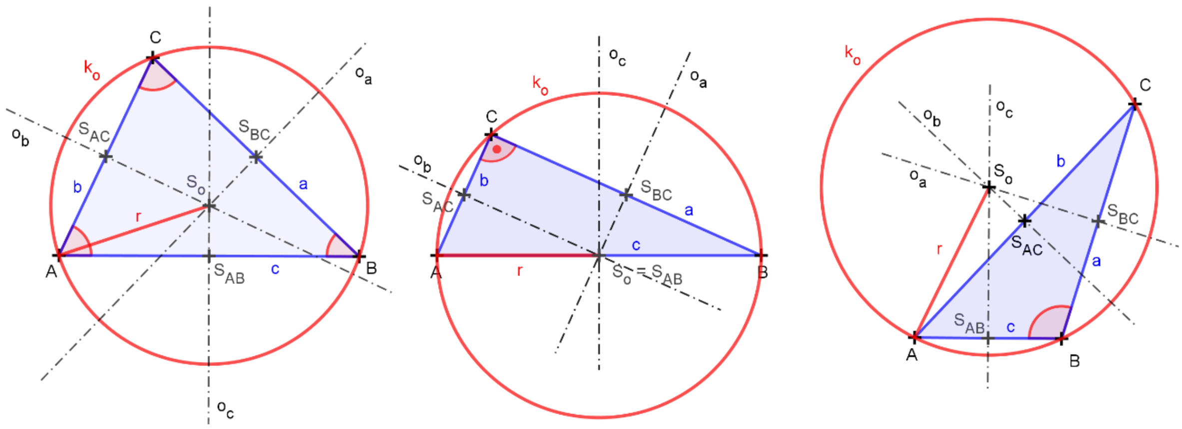
- **výška, pata výšky a ortocentrum**
  - **výška trojúhelníku** je úsečka, jejímiž krajními body jsou vrchol trojúhelníku a pata kolmice vedené tímto vrcholem k přímce, na níž leží protější strana trojúhelníku;
  - průsečík výšky s příslušnou přímkou, na níž leží strana trojúhelníku, se nazývá **pata výšky**;
  - každý trojúhelník má právě tři výšky, značíme je např. v_a, v_b, v_c;
  - přímky, na nichž leží výšky trojúhelníku, se protínají v jednom bodě, který se nazývá **ortocentrum**;
  - ortocentrum
    a) leží uvnitř trojúhelníku, pokud je trojúhelník ostroúhlý,
    b) splývá s vrcholem, při němž je pravý úhel, pokud je trojúhelník pravoúhlý,
    c) leží vně trojúhelníku, pokud je trojúhelník tupoúhlý;



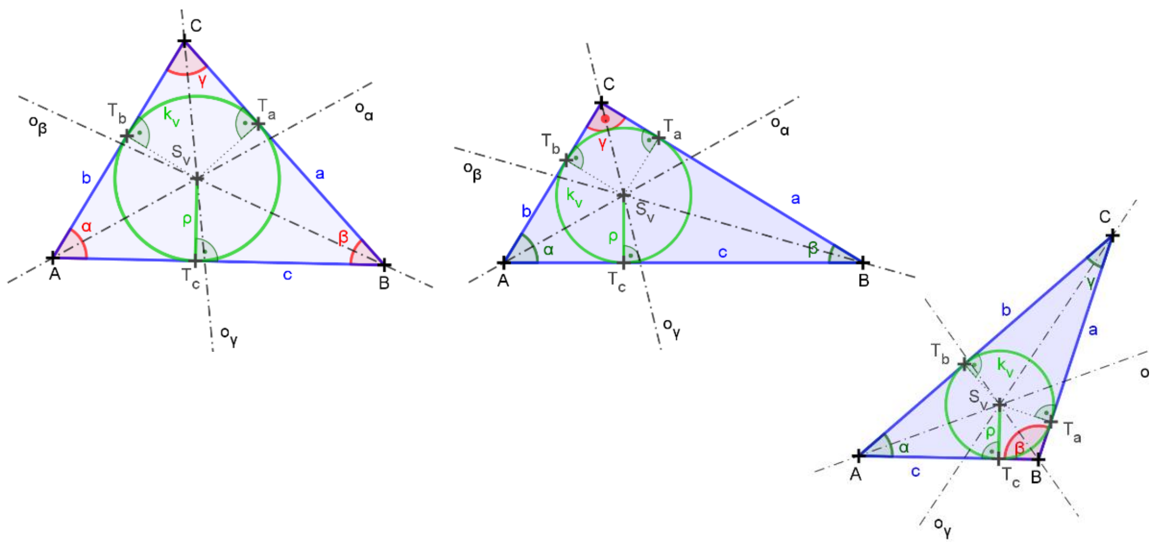




- **osy stran a střed kružnice trojúhelníku opsané**
  - **osa strany** trojúhelníku je kolmice vedená středem příslušné strany trojúhelníku;
  - každý trojúhelník má právě tři osy stran, značíme je např. o_a, o_b, o_c;
  - osy stran se protínají v jednom bodě, tj. tento bod má stejnou vzdálenost od všech tří vrcholů trojúhelníku, je tedy středem kružnice trojúhelníku opsané;
  - **střed kružnice trojúhelníku opsané**
    a) leží uvnitř trojúhelníku, pokud je trojúhelník ostroúhlý,
    b) splývá se středem přepony, pokud je trojúhelník pravoúhlý (Thaletova kružnice),
    c) leží vně trojúhelníku, pokud je trojúhelník tupoúhlý;
  - **kružnice trojúhelníku opsaná** prochází všemi vrcholy trojúhelníku (poloměr kružnice trojúhelníku opsané se tedy rovná vzdálenosti jejího středu od libovolného vrcholu trojúhelníku, značíme jej obvykle *r*).



- **osy vnitřních úhlů a střed kružnice trojúhelníku vepsané**
  - **osa vnitřního úhlu** trojúhelníku dělí příslušný vnitřní úhel na polovinu a současně dělí protější stranu v poměru délek přilehlých stran;
  - každý trojúhelník má právě tři osy vnitřních úhlů, značíme je např. o_α, o_β, o_γ, jsou-li vnitřní úhly trojúhelníku označeny α, β, γ;
  - osy vnitřních úhlů trojúhelníku se protínají v jednom bodě, který je středem kružnice trojúhelníku vepsané;
  - střed kružnice trojúhelníku vepsané leží vždy uvnitř trojúhelníku;
  - střed kružnice trojúhelníku vepsané má stejnou vzdálenost od všech tří stran trojúhelníku, tj. **kružnice trojúhelníku vepsaná** se dotýká všech stran trojúhelníku (poloměr kružnice trojúhelníku vepsané se tedy rovná vzdálenosti jejího středu od libovolné strany trojúhelníku, značíme jej obvykle ρ).



Speciální typy trojúhelníků:

a) rovnostranný trojúhelník

Kromě vlastností, které jsou společné pro každý trojúhelník, má rovnostranný trojúhelník ještě navíc tyto vlastnosti:

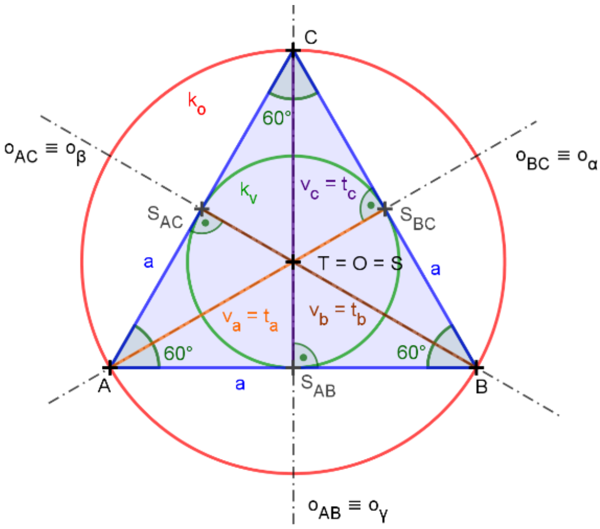
- je osově souměrný podle 3 os souměrnosti, ty jsou osami stran trojúhelníku a procházejí vždy vrcholem rovnostranného trojúhelníku a středem protější strany;
- všechny jeho vnitřní úhly jsou shodné a velikost každého z nich je 60°;
- všechny jeho výšky a těžnice jsou shodné;
- těžnice a výška příslušné k téže straně jsou totožné (splývající);
- střed kružnice rovnostrannému trojúhelníku vepsané, střed kružnice rovnostrannému trojúhelníku opsané, průsečík těžnic (těžiště) a průsečík výšek (ortocentrum) splývají;
- poloměr ρ kružnice rovnostrannému trojúhelníku vepsané je roven jedné třetině výšky v, resp. těžnice t, tj.

$$\rho = \frac{1}{3}v = \frac{1}{3}t = \frac{\sqrt{3}}{6}a\,,$$

  kde a je délka strany rovnostranného trojúhelníku;
- poloměr r kružnice rovnostrannému trojúhelníku opsané je dvakrát větší než poloměr ρ kružnice témuž rovnostrannému trojúhelníku vepsané, tj.

$$r = 2\,\rho = \frac{2}{3}v = \frac{2}{3}t = \frac{\sqrt{3}}{3}a\,;$$

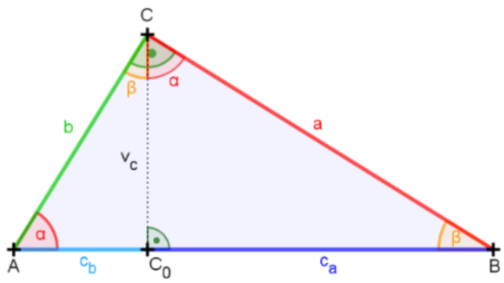
- vzdálenost těžiště od libovolné strany rovnostranného trojúhelníku je taktéž $\frac{\sqrt{3}}{6}a$, vzdálenost těžiště od jakéhokoli vrcholu je $\frac{\sqrt{3}}{3}a$.
-



b) pravoúhlý trojúhelník

V pravoúhlém trojúhelníku *ABC* s pravým úhlem u vrcholu *C* nazýváme strany *a, b* **odvěsny** a stranu *c* **přepona**.

Pata C_0 výšky v_c rozděluje stranu *c* na dvě úsečky AC_0, resp. C_0B, které nazýváme **úsek přilehlý** k odvěsně *b*, resp. k odvěsně *a* a značíme c_b, resp. c_a.



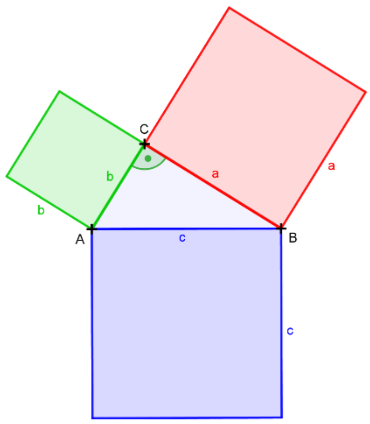
V pravoúhlém trojúhelníku platí:

- **Pythagorova věta**

  Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku je roven součtu obsahu čtverců sestrojených nad jeho odvěsnami.

  Pro Δ *ABC* s pravým úhlem při vrcholu *C* můžeme Pythagorovu větu zapsat symbolicky ve tvaru:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

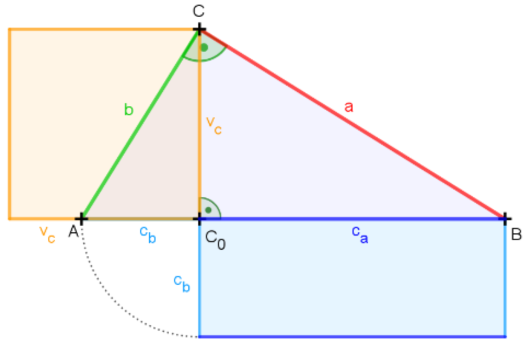


- **Eukleidova věta o výšce**

  Obsah čtverce sestrojeného nad výškou pravoúhlého trojúhelníku se rovná obsahu obdélníku sestrojeného z úseků přepony.

  Pro Δ *ABC* s pravým úhlem při vrcholu *C* můžeme Eukleidovu větu o výšce zapsat symbolicky např. ve tvaru:

$$v_c^2 = c_a \cdot c_b.$$



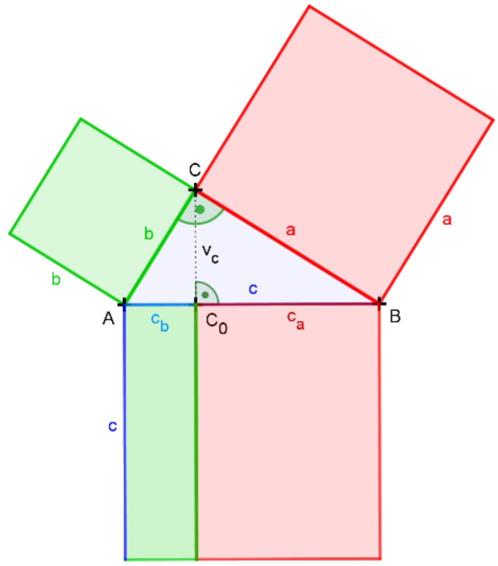
- **Eukleidova věta o odvěsně**

  Obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku se rovná obsahu obdélníku, jehož jednou stranou je přepona a druhá strana je shodná s úsekem přepony přilehlým k této odvěsně.

  Pro Δ *ABC* s pravým úhlem při vrcholu *C* můžeme Eukleidovu větu o odvěsně zapsat symbolicky např. ve tvaru:

$$a^2 = c \cdot c_a,$$

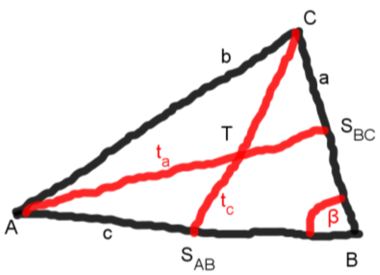
$$b^2 = c \cdot c_b.$$



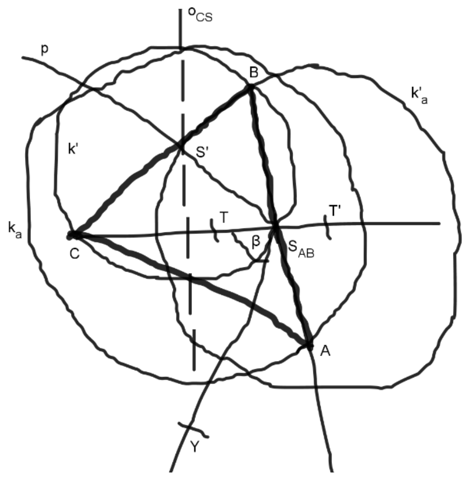
Příklad 1.1:

Sestrojte trojúhelník *ABC*, je-li dáno: $t_a = 6$ cm, $t_c = 4{,}5$ cm, $\beta = 60°$.

Náčrtek:



Grafický rozbor:



Slovní popis řešení:

K řešení úlohy postupně užijeme zadané prvky. Nejprve sestrojíme úsečku CS_{AB} o velikosti délky těžnice $t_c = 4{,}5$ cm. Na úsečce CS_{AB} sestrojíme těžiště *T* konstruovaného trojúhelníku *ABC,* víme-li, že těžiště *T* je od vrcholu *C* vzdáleno o 2/3 délky těžnice t_c.

K sestrojení vrcholu *B* užijeme zadaného úhlu β, tj. nejprve zkonstruujeme úsekový úhel $\beta = |\angle CS_{AB}Y| = 60°$. Dále získáme střed *S´* kruhového oblouku, který je množinou vrcholů obvodových úhlů o velikosti $\beta = 60°$, jako průsečík přímky p procházející bodem S_{AB} kolmo k přímce $S_{AB}Y$ a osy o_{CS} úsečky CS_{AB}. Uvedený kruhový oblouk je částí kružnice se středem S' a s poloměrem o velikosti úsečky CS'. Bod B je průsečíkem většího kruhového oblouku příslušného tětivě CS_{AB} kružnice k' a dále kružnice k'_a se středem v bodě T', který je obrazem těžiště T ve středové souměrnosti podle středu S_{AB}, a s poloměrem rovným 2/3 délky těžnice t_a.

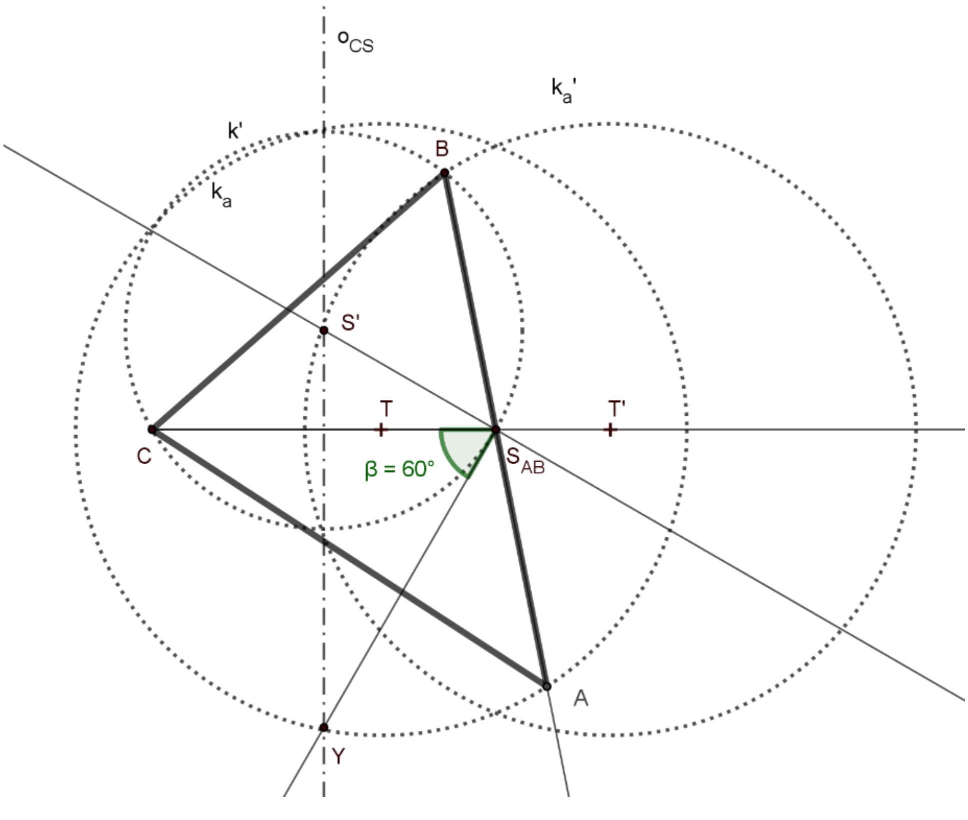
Vrchol A můžeme sestrojit jako průsečík polopřímky BS_{AB} a kružnice k_a se středem v těžišti T a o poloměru rovném 2/3 délky těžnice t_a, anebo také jako obraz bodu B ve středové souměrnosti se středem S_{AB}. Na závěr zkonstruujeme trojúhelník ABC.

Diskuse řešení: Úloha má pro dané zadání prvků v rovině jedno řešení.

Symbolický zápis konstrukce:

1) t_c; $t_c = |CS_{AB}| = 4{,}5$ cm
2) T; $T \in CS_{AB} \wedge |CT| = 2/3\,|CS_{AB}| = 2/3\, t_c = 3$ cm
3) $\angle CS_{AB}Y$; $|\angle CS_{AB}Y| = \beta = 60°$
4) p; $S_{AB} \in p \wedge p \perp S_{AB}Y$
5) o_{CS}; o_{CS} je osa úsečky CS_{AB}
6) S'; $S' \equiv p \cap o_{CS}$
7) T'; SS (S_{AB}, $T \to T'$)
8) k'; k' (S', $|CS'|$)
9) k'_a; k'_a (T', 2/3 t_a = 4 cm)
10) B; $B \equiv k'_a \cap k'$
11) k_a; k_a (T, 2/3 t_a = 4 cm)
12) A; $A \equiv k_a \cap \rightarrow BS_{AB}$
13) $\triangle ABC$

Konstrukce:



Úloha 1.8:

Sestrojte trojúhelník *ABC*, je-li dáno:

a) $c,\ \alpha,\ t_c$

b) $c,\ \alpha,\ t_b$

c) $c,\ \alpha,\ t_a$

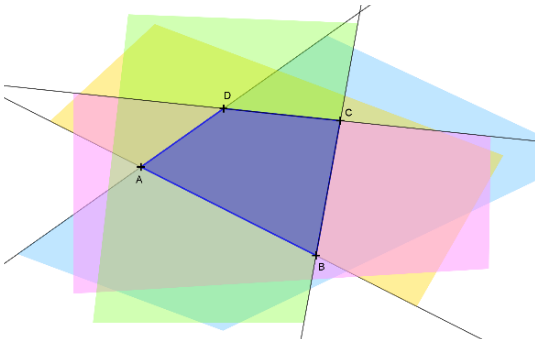
d) $b,\ c,\ t_c$

e) $a,\ b,\ v_c$

f) $\alpha,\ \beta,\ v_c$

g) $c,\ \gamma,\ v_c$

1.2.4 Čtyřúhelníky



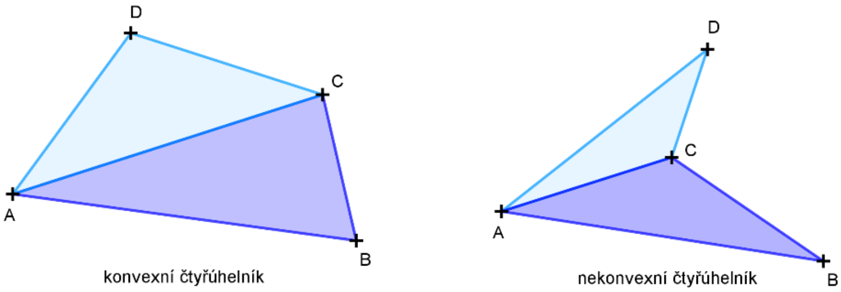
Pojem čtyřúhelník je možné zavést několika různými způsoby, dále uvedeme dva z nich.

Definice 1.10:

Obecným konvexním čtyřúhelníkem *ABCD* rozumíme průnik čtyř polorovin $\rightarrow ACB$, $\rightarrow BCD$, $\rightarrow CDA$, $\rightarrow DAB$, jestliže žádné tři body *A, B, C, D* nejsou kolineární.

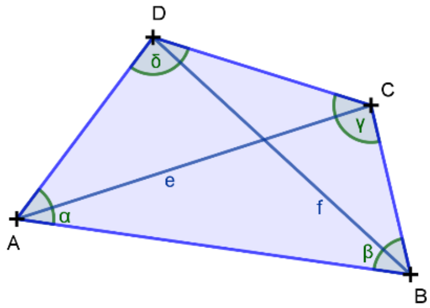
Definice 1.11:

Čtyřúhelníkem *ABCD* nazýváme sjednocení dvou trojúhelníků *ACB, ACD* ležících v navzájem opačných polorovinách s hraniční přímkou *AC*, jestliže žádné tři body *A, B, C, D* nejsou kolineární.



Uvedená definice 1.11 čtyřúhelníku připouští, že daný útvar může být i nekonvexní. Nekonvexními čtyřúhelníky se ale zabývat nebudeme, proto pod názvem čtyřúhelník budeme nadále rozumět vždy jen čtyřúhelník konvexní – v opačném případě nekonvexnost čtyřúhelníku zdůrazníme.

Základní pojmy související se čtyřúhelníkem:

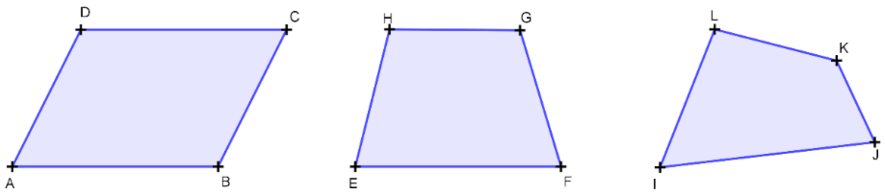


- body *A, B, C, D* se nazývají **vrcholy** čtyřúhelníku *ABCD*;
- úsečky spojující sousední vrcholy čtyřúhelníku, tj. úsečky $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$ a $d = DA$, se nazývají **strany** čtyřúhelníku *ABCD*;
- úhly, které svírají sousední strany čtyřúhelníku, se nazývají **vnitřní úhly** čtyřúhelníku *ABCD;* jsou to úhly $\alpha = \angle DAB$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle BCD$, $\delta = \angle CDA$;
- úsečky spojující protější vrcholy čtyřúhelníku, tj. úsečky $e = AC$, $f = BD$, na nazývají **úhlopříčky** čtyřúhelníku *ABCD*;
- každý čtyřúhelník má 4 vrcholy, 4 strany, 4 vnitřní úhly a 2 úhlopříčky;
- sjednocení stran čtyřúhelníku tvoří jeho **obvod**. Obvod *o* čtyřúhelníku vypočteme součtem délek jeho stran, tj. $o = a + b + c + d$;
- body čtyřúhelníku nenáležící jeho obvodu jsou **body vnitřku čtyřúhelníku**, body nenáležící čtyřúhelníku jsou body vnějšku čtyřúhelníku;
- velikosti **obsahů** *S* jednotlivých čtyřúhelníků počítáme dle specifických vzorců.

Konvexní čtyřúhelníky lze třídit podle několika kritérií, tj. podle:

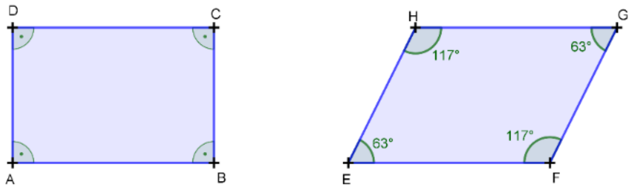
a) počtu rovnoběžných stran

- **rovnoběžníky** (dvě dvojice navzájem rovnoběžných stran)
- **lichoběžníky** (jedna dvojice navzájem rovnoběžných stran)
- **různoběžníky** (žádná dvojice navzájem rovnoběžných stran)



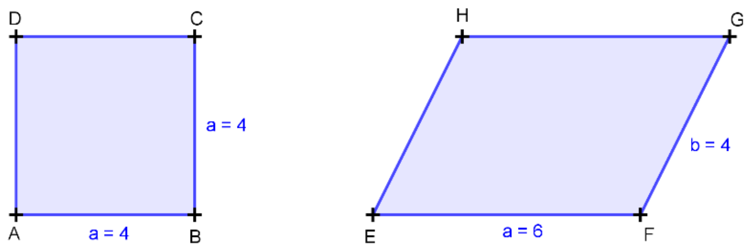
b) velikostí vnitřních úhlů

- **pravoúhlé** (všechny vnitřní úhly jsou pravé)
- **kosoúhlé** (vnitřní úhly jsou ostré nebo tupé)



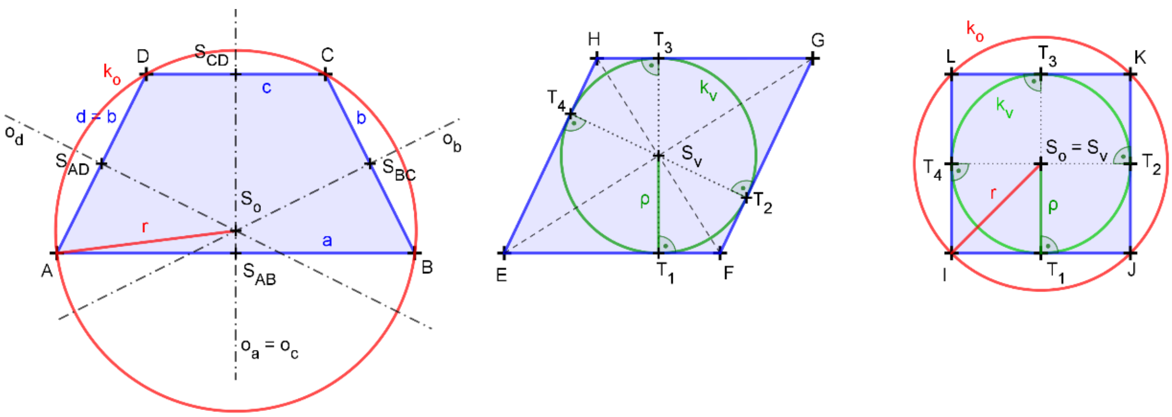
c) délek stran

- **rovnostranné** (všechny strany jsou shodné)
- **různostranné** (alespoň dvě strany jsou různě dlouhé)
- **rovnoramenné** (pouze v případě lichoběžníku)



d) kružnice, kterou jim je možné opsat/vepsat

- **tětivové** (čtyřúhelníky, jimž lze kružnici opsat)
- **tečnové** (čtyřúhelníky, jimž lze kružnici vepsat)
- **dvojstředové** (čtyřúhelníky, jimž lze kružnici vepsat i opsat)



Přehled známých konvexních čtyřúhelníků

- roztříděných podle počtu navzájem rovnoběžných stran a podle velikostí vnitřních úhlů

A) rovnoběžníky ($a \parallel c \wedge b \parallel d$)

A1) kosoúhelníky ($\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 90°$)

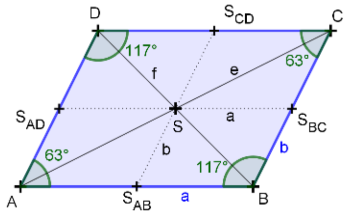
- **kosodélník** ($a = c \wedge b = d \wedge a \neq b$)

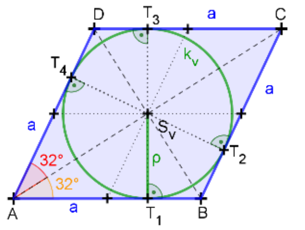
- **kosočtverec** ($a = b = c = d$)

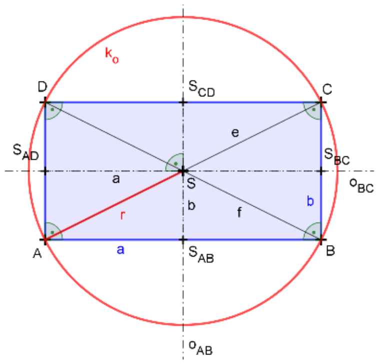
A2) pravoúhelníky ($\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90°$)

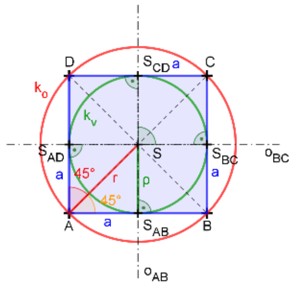
- **obdélník** ($a = c \wedge b = d \wedge a \neq b$)

- **čtverec** ($a = b = c = d$)









Vlastnosti kosodélníku (rovnoběžníku):

- čtyřúhelník, ve kterém jedna dvojice protějších stran jsou shodné a navzájem rovnoběžné úsečky, je kosodélník;
- protější strany kosodélníku jsou shodné úsečky. Obráceně, jestliže ve čtyřúhelníku jsou protější strany shodné, potom je to kosodélník;
- úhlopříčky kosodélníku se navzájem půlí, takže kosodélník je středově souměrný útvar. Obráceně, jestliže se úhlopříčky čtyřúhelníku navzájem půlí, pak je to kosodélník;
- součet úhlů přilehlých ke kterékoli straně kosodélníku je 180°;
- protější úhly kosodélníku jsou shodné;
- střední příčka kosodélníku prochází jeho středem, je rovnoběžná s těmi stranami kosodélníku, jejichž středy nespojuje, a je shodná s každou z nich;
- obvod kosodélníku vypočteme ze vzorce
$$o = 2 \cdot (a + b),$$
kde a, b jsou délky stran kosodélníku;
- obsah kosodélníku vypočteme ze vzorce
$$S = a \cdot v_a,$$
kde a je délka strany kosodélníku a v_a je velikost výšky kosodélníku k této straně.

Vlastnosti kosočtverce:

- úhlopříčky kosočtverce jsou na sebe kolmé. Obráceně, kosodélník, jehož úhlopříčky jsou na sebe kolmé, je kosočtverec nebo čtverec;
- kosočtverec má dvě osy souměrnosti; jsou to přímky, ve kterých leží jeho úhlopříčky. Obráceně, kosodélník, který má za osu souměrnosti přímku procházející jeho protějšími vrcholy, je kosočtverec nebo čtverec;
- úhlopříčka kosočtverce půlí jeho úhly při vrcholech, z nichž vychází. Obráceně, kosodélník, jehož jedna úhlopříčka půlí jeho úhel při vrcholu, z něhož vychází, je kosočtverec nebo čtverec;
- ze středu kosočtverce lze sestrojit kružnici, která se dotýká všech jeho stran (kružnice kosočtverci vepsaná). Obráceně, jestliže lze kosodélníku vepsat kružnici, pak je to kosočtverec nebo čtverec;
- obvod kosočtverce vypočteme ze vzorce
$$o = 4 \cdot a,$$
kde a je délka strany kosočtverce;
- obsah kosočtverce vypočteme ze vzorců
$$S = a \cdot v = \tfrac{1}{2} e \cdot f,$$
kde a je délka strany kosočtverce a v je velikost výšky kosočtverce, resp. e, f jsou délky úhlopříček kosočtverce.

Vlastnosti obdélníku:

- kosodélník, jehož jeden úhel je pravý a který má shodné úhlopříčky, je obdélník;
- obdélník má dvě osy souměrnosti; jsou to přímky, ve kterých leží střední příčky obdélníku;
- obdélník je středově souměrný podle svého středu;
- jeho úhlopříčky jsou shodné a navzájem se půlí;
- ze středu obdélníku lze opsat kružnici, která prochází všemi jeho vrcholy (kružnice obdélníku opsaná);
- obvod obdélníku vypočteme ze vzorce

$$o = 2 \cdot (a + b)$$

  kde *a*, *b* jsou délky stran obdélníku;
- obsah obdélníku vypočteme ze vzorce

$$S = a \cdot b,$$

  kde *a, b* jsou délky stran obdélníku.

Vlastnosti čtverce:

- jeho protější strany jsou navzájem rovnoběžné;
- má shodné všechny čtyři strany;
- všechny čtyři jeho vnitřní úhly jsou pravé;
- je souměrný podle svého středu a podle čtyř os (úhlopříček a středních příček);
- jeho úhlopříčky se navzájem půlí;
- jeho úhlopříčky i jeho střední příčky jsou k sobě navzájem kolmé;
- úhlopříčky svírají se stranami čtverce úhly o velikosti 45˚;
- čtverci lze opsat i vepsat kružnici (je příkladem dvojstředového čtyřúhelníku)
- obvod čtverce vypočteme ze vzorce

$$o = 4 \cdot a,$$

  kde *a* je délka strany čtverce;
- obsah čtverce vypočteme ze vzorců

$$S = a^2 = \frac{1}{2}u^2,$$

  kde *a* je délka strany čtverce, resp. *u* je délka úhlopříčky čtverce.

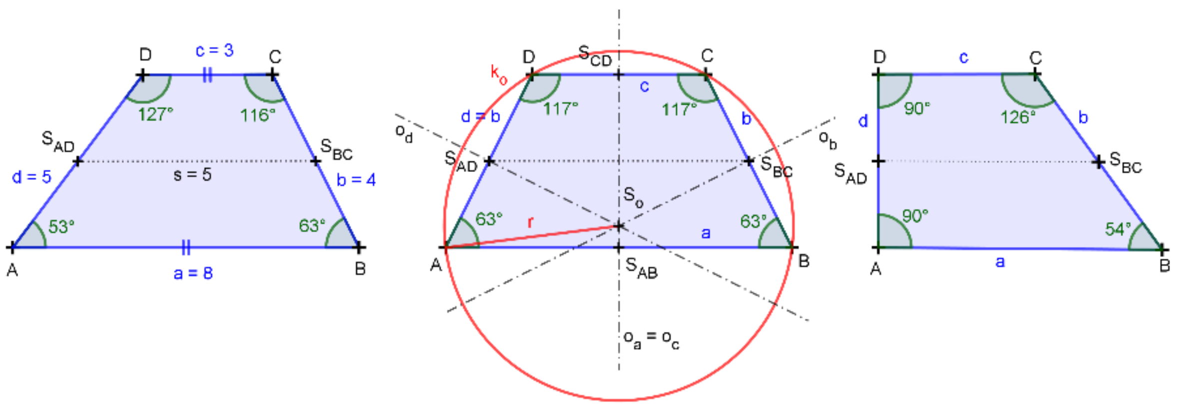
B) lichoběžníky ($a \parallel c \wedge b \nparallel d$)

– strany *a, c* nazýváme **základny** a strany *b, d* **ramena** lichoběžníku

B1) obecný

B2) rovnoramenný ($b = d$)

B3) pravoúhlý ($\alpha = 90°$)



Vlastnosti lichoběžníku (*ABCD* se základnami $|AB| > |CD|$ platí):

- součet úhlů přilehlých k témuž rameni lichoběžníku je 180°;
- střední příčka lichoběžníku je rovnoběžná se základnami lichoběžníku a její délka je rovna velikosti polovičního součtu obou základen;
- obvod lichoběžníku vypočteme ze vzorce

$$o = a + b + c + d,$$

kde *a, b, c, d* jsou délky stran lichoběžníku;

- obsah lichoběžníku vypočteme ze vzorců

$$S = \frac{1}{2}(a+c) \cdot v = s \cdot v\,,$$

kde *a, b* jsou délky základen lichoběžníku a *v* je velikost výšky lichoběžníku, resp. *s* je délka střední příčky lichoběžníku, pro jejíž délku platí, že

$$s = \frac{1}{2}(a+c).$$

Vlastnosti rovnoramenného lichoběžníku (*ABCD* se základnami $|AB| > |CD|$ platí):

- v rovnoramenném lichoběžníku jsou úhly při téže základně shodné; při delší základně jsou ostré, při kratší základně jsou tupé. Obráceně, jestliže jsou v lichoběžníku oba úhly při téže základně shodné, je to rovnoramenný lichoběžník;
- společná osa obou základen rovnoramenného lichoběžníku je jeho osou souměrnosti.

Pravoúhlý lichoběžník:

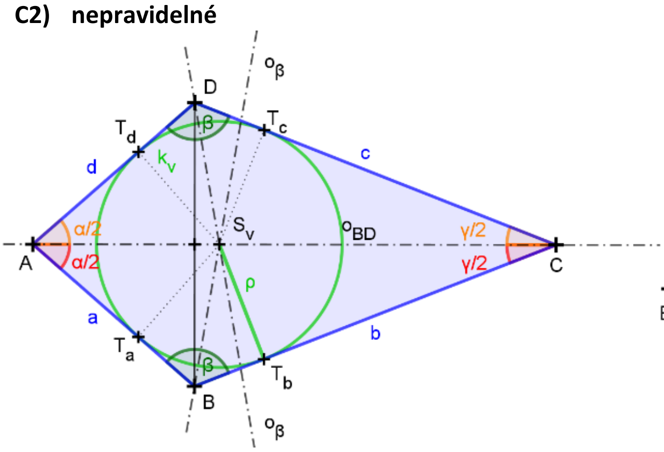
Lichoběžník *ABCD*, v němž je *AB // CD*, $|AB| > |CD|$ a který má při jednom rameni dva pravé úhly, se nazývá pravoúhlý lichoběžník. Potom jsou nutně oba zbývající úhly kosé. Kdyby byly pravé, nejednalo by se o lichoběžník, ale o obdélník.

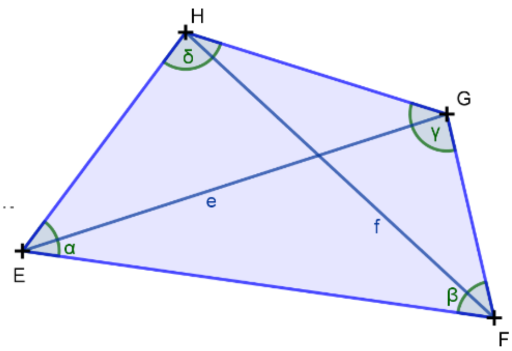
C) různoběžníky ($a \nparallel c \wedge b \nparallel d$)

C1) pravidelné

- př. **deltoid** ($a = d \wedge b = c \wedge a \neq b$)

C2) nepravidelné





Vlastnosti deltoidu *ABCD*:

- strany deltoidu jsou po dvou shodné, tj. $|AB| = |AD|$, $|BC| = |DC|$;
- úhlopříčka *AC* je osou souměrnosti deltoidu *ABCD*;
- úhlopříčka *AC* je osou úhlopříčky *BD* a půlí úhly deltoidu při vrcholech *A, C;*
- úhly při vrcholech *B, D* jsou shodné;
- střed *S* kružnice deltoidu vepsané leží na ose *AC* a na osách úhlů $\angle ABC$ a $\angle ADC$;
- k určení deltoidu je třeba tří určovacích prvků (stran, úhlů, úhlopříček apod.);
- obvod deltoidu vypočteme ze vzorce

$$o = 2 \cdot (a+b),$$

kde *a, b* jsou délky stran deltoidu;

- obsah deltoidu vypočteme ze vzorce

$$S = \frac{1}{2} e \cdot f,$$

kde *e, f* jsou délky úhlopříček deltoidu.

Příklady konvexních čtyřúhelníků, jimž lze opsat/vepsat kružnici

Každému trojúhelníku lze vepsat i opsat kružnici, u čtyřúhelníku tomu však tak obecně být nemusí.

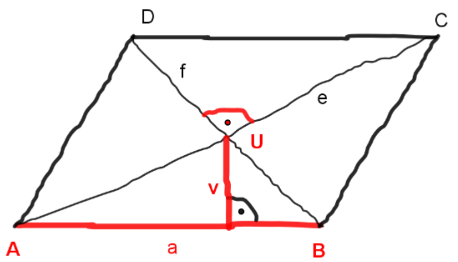
Některým čtyřúhelníkům lze opsat kružnici (tzv. **tětivové čtyřúhelníky** – obdélník, rovnoramenný lichoběžník, čtverec), jiným čtyřúhelníkům lze kružnici vepsat (tzv. **tečnové čtyřúhelníky** – např. kosočtverec, deltoid, čtverec). Většinou však nelze čtyřúhelníku kružnici ani opsat, ani vepsat.

Čtyřúhelník, jemuž můžeme opsat i vepsat kružnici (středy kružnic mohou, ale nemusejí splývat) se nazývá **dvojstředový čtyřúhelník**. Příkladem je čtverec.

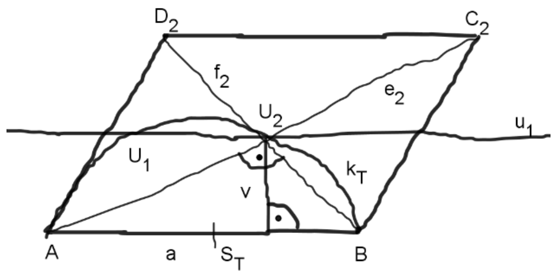
__Příklad 1.2:__

Sestrojte rovnoběžník *ABCD*, je-li dáno: $a = |AB|$, $v = v\,(U, a)$, kde *U* je průsečík úhlopříček *e* a *f*, přitom platí, že $e \perp f$ a $f = |BD|$. Proveďte diskusi řešení. Sestrojte všechna možná řešení.

Náčrtek:



Grafický rozbor:



Slovní popis a diskuse řešení:

K řešení úlohy nejprve užijeme zadaných prvků, tj. sestrojíme stranu *a* rovnoběžníku a přímky u_1, u_2 s ní rovnoběžné a od ní vzdálené o délku $v = v\,(u_1, a) = v\,(u_2, a)$. Protože úhlopříčky *e, f* hledaného rovnoběžníku *ABCD* mají být na sebe navzájem kolmé, sestrojíme nad stranou $a = AB$ Thaletovu kružnici k_T (S_T, $r_T = |S_TA|$), kde S_T je střed úsečky $a = AB$. Průsečík *U* úhlopříček rovnoběžníku leží jak na Thaletově kružnici k_T, tak i na přímkách u_1, u_2.

Přitom pokud Thaletova kružnice k_T

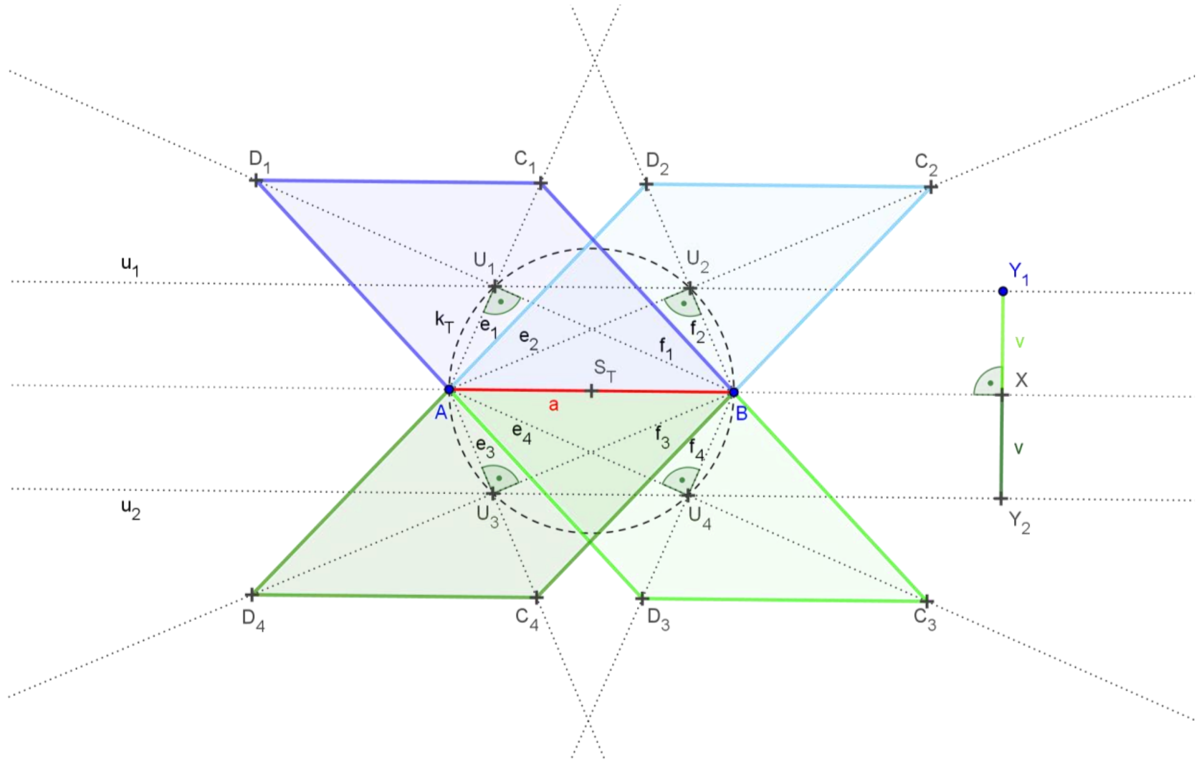
- protíná každou z přímek u_1, u_2 ve dvou bodech, má úloha v rovině **4 řešení**. Tato situace nastává v případě, že $r_T = |S_TA| > v = v\,(u_1, a) = v\,(u_2, a)$.
- se dotýká přímek u_1, u_2, má úloha v rovině **2 řešení**. Tj. platí, že $r_T = |S_TA| = v = v\,(u_1, a) = v\,(u_2, a)$.
- neprotíná žádnou z přímek u_1, u_2, nemá úloha v rovině **žádné řešení**.
  Tj. $r_T = |S_TA| < v = v\,(u_1, a) = v\,(u_2, a)$.

Rovnoběžník je geometrický útvar, který je souměrný podle svého středu. Jeho chybějící vrcholy *C, D* dorýsujeme tedy po řadě jako obrazy bodů *A, B* ve středové souměrnosti se středem *U*.

Symbolický zápis konstrukce:

1) $a;\ a = |AB|$
2) $u_1, u_2;\ u_1, u_2 \parallel a \wedge v = v\,(u_1, a) = v\,(u_2, a)$
3) $S_T;\ S_T \in a \wedge |AS_T| = |BS_T|$
4) $k_T;\ k_T\,(S_T, r_T = |AS_T|)$
5) $U_1, U_2;\ U_1, U_2 \equiv k_T \cap u_1$
   $U_3, U_4;\ U_3, U_4 \equiv k_T \cap u_2$
6) $e_1, f_1;\ e_1 \equiv \rightarrow AU_1,\ f_1 \equiv \rightarrow BU_1$
   $e_2, f_2;\ e_2 \equiv \rightarrow AU_2,\ f_2 \equiv \rightarrow BU_2$
   $e_3, f_3;\ e_3 \equiv \rightarrow AU_3,\ f_3 \equiv \rightarrow BU_3$
   $e_4, f_4;\ e_4 \equiv \rightarrow AU_4,\ f_4 \equiv \rightarrow BU_4$
7) C_1, D_1; SS (U_1, $A \rightarrow C_1$), SS (U_1, $A \rightarrow D_1$)
   C_2, D_2; SS (U_2, $A \rightarrow C_2$), SS (U_2, $A \rightarrow D_2$)
   C_3, D_3; SS (U_3, $A \rightarrow C_3$), SS (U_3, $A \rightarrow D_3$)
   C_4, D_4; SS (U_4, $A \rightarrow C_4$), SS (U_4, $A \rightarrow D_4$)
8) rovnoběžníky ABC_1D_1, ABC_2D_2, ABC_3D_3, ABC_4D_4

Konstrukce:



<u>Úloha 1.9:</u>

Sestrojte obdélník *ABCD*, je-li dáno:

a) a, $b + e$, kde $e = AC$

b) $e = AC$, o (obvod obdélníku)

c) $a + b$, $|\angle ASB| = 150°$, S je střed obdélníku

<u>Úloha 1.10:</u>

Sestrojte rovnoběžník *ABCD*, je-li dáno:

a) a, v_a, v_b

b) strana $a \equiv |AB|$, výška v_a na stranu a a úhel $\varphi = |\measuredangle CAB|$

<u>Úloha 1.11:</u>

Sestrojte kosočtverec *ABCD*, je-li dáno:

a) $v = v(AB, CD)$, $e = |AC| = 2v$

b) $\alpha = |\angle BAD|$, $e + f$, kde $e = |AC|$, $f = |BD|$

<u>Úloha 1.12:</u>

Sestrojte deltoid *ABCD*, je-li dáno: $a + b$, e, $\alpha = |\angle BAD|$, kde $a = |AB|$, $b = |BC|$, $a \neq b$, $e = |AC|$.

1.2.5 Pravidelné mnohoúhelníky a jejich konstrukce

V této kapitole je uveden přehled několika vybraných pravidelných konvexních mnohoúhelníků. Přitom u každého z těchto pravidelných mnohoúhelníků je popsána jeho konstrukce.

Některé pravidelné mnohoúhelníky lze tzv. Euklidovskou konstrukcí (tj. konstrukcí s užitím pouze pravítka a kružítka) vytvořit jednoduše, jiné ne. To vedlo k otázce, zda je možné Euklidovskou konstrukcí sestrojit všechny pravidelné mnohoúhelníky.

Pomocí pravítka a kružítka lze sestrojit stranu pravidelného mnohoúhelníku pro:

1) 2^k, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$,

2) $2^{2^k} + 1$, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 0$,

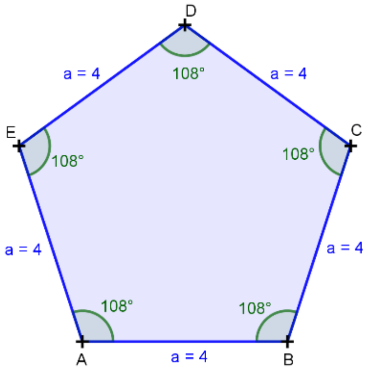
Johann Carl Friedrich Gauss (* 30. 4. 1777, Braunschweig – ✞ 23. 2. 1855, Göttingen) byl slavný německý matematik a fyzik. Z matematiky se mj. zabýval především geometrií, matematickou analýzou a teorií čísel. Silně ovlivnil většinu oborů vědění, kterým se věnoval. Gauss dokázal existenci Eukleidovské konstrukce pro pravidelné *n*-úhelníky, kde $n = \{3, 5, 17, 257, \ldots\}$.

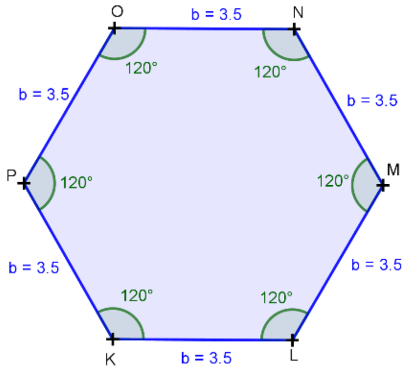
3) $2^i \cdot (2^{2^k} + 1)$, $i \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}$, $i \geq 1, k \geq 0$.

Díky možnosti půlit úhly je možné sestrojit **2*n*-úhelník** právě tehdy, když lze sestrojit *n*-úhelník, kde $n \in \mathbf{N}$. Je však dokázáno, že pro sedmi- a devítiúhelník přesná Euklidovská konstrukce neexistuje. Pro $n > 5$ lze *n*-úhelník sestrojit jen výjimečně a to netriviálními způsoby. Pro ostatní *n* existují **přibližné** konstrukce.

Definice 1.12:

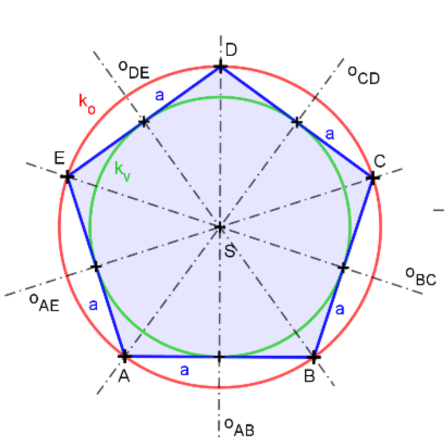
Pravidelný mnohoúhelník (**pravidelný *n*-úhelník**, kde $n \in \mathbf{N}$) je mnohoúhelník, který má všechny vnitřní úhly stejně velké a všechny strany stejně dlouhé.

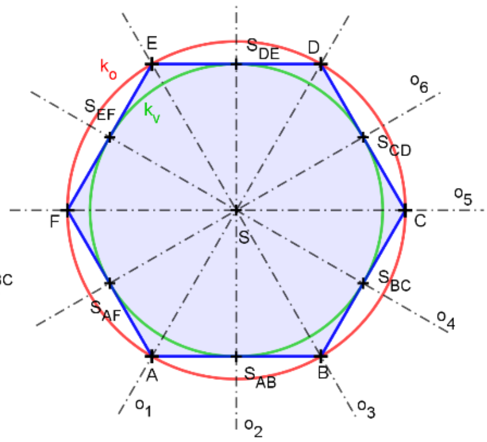




Obecné vlastnosti pravidelných mnohoúhelníků:

- všechny vrcholy pravidelného mnohoúhelníku leží na stejné kružnici (kružnice pravidelnému mnohoúhelníku opsaná);
- existence stejné délky všech stran u pravidelného mnohoúhelníku znamená, že má i kružnici vepsanou, která se dotýká každé strany pravidelného mnohoúhelníku v jejím středu;
- každému pravidelnému mnohoúhelníku lze tedy opsat i vepsat kružnici. Tyto kružnice mají společný střed, jsou tzv. soustředné;
- pravidelný *n*-úhelník ($n \in \mathbf{N}$) je konstruovatelný Eukleidovskou konstrukcí tehdy a jen tehdy, když jsou liché dělitele *n* různá Fermatova prvočísla;
- pravidelné *n*-úhelníky ($n \in \mathbf{N}$) jsou symetrické, tj.
  - pravidelný *n*-úhelník má *n* os souměrnosti,
  - je-li *n* sudé číslo, pak má i střed souměrnosti.





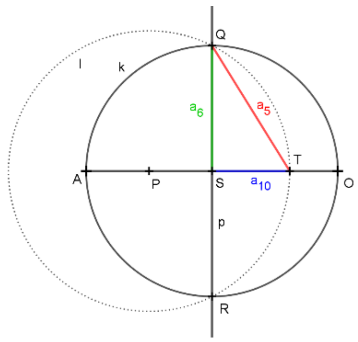
Přehled vybraných pravidelných konvexních mnohoúhelníků:

I. pravidelný pětiúhelník (pentagon)

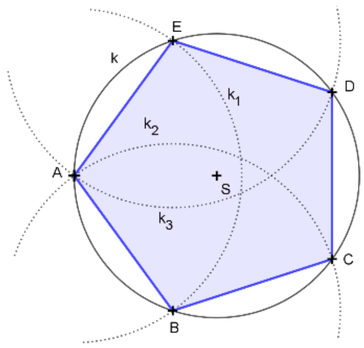
Pravidelný pětiúhelník je rovinný geometrický útvar (pravidelný mnohoúhelník) s pěti vrcholy a pěti shodnými stranami. Jeho vrcholy jsou rovnoměrně rozmístěné na kružnici mu opsané a jeho strany jsou tečnami (tangentami) kružnice vepsané. Součet velikostí vnitřních úhlů pravidelného pětiúhelníku je roven přesně 540°, v obloukové míře 3π (tj. velikost vnitřního úhlu u vrcholu pravidelného pětiúhelníku je 108°).

Pravidelný pětiúhelník je v podstatě složen z pěti shodných rovnoramenných trojúhelníků, jejichž úhly při základně mají velikost $\frac{3}{10}\pi$ a při vrcholu $\frac{2}{5}\pi$.

Konstrukce pravidelného pětiúhelníku (desetiúhelníku):
Pro vyrýsování úsečky o délce strany pravidelného pětiúhelníku (desetiúhelníku) sestrojme:



1) úsečku *AO* se středem *S;*
2) kružnici *k* (*S, r* = |*AS*|)*;*
3) střed *P* úsečky *AS,* tj. platí |*AP*| = |*PS*|;
4) kolmici *p* k úsečce *AB* vedenou bodem *S;*
5) body *Q, R* jako průsečíky přímky *p* a kružnice *k;*
6) kružnici *l* (*P, r* = |*PQ*|)*;*
7) bod *T* jako průsečík kružnice *l* a úsečky *SO;*
8) délka úsečky *QT* je délka strany pravidelného pětiúhelníku;
   (délka úsečky *ST* je délka strany pravidelného desetiúhelníku)
9) kružnici k_1 (*A, r* = |*QT*|)*;*
10) vrcholy *B* a *E* jako průsečíky kružnic *k* a k_1;
11) kružnici k_2 (*B, r* = |*QT*|)*;*
12) vrchol *C* jako průsečík kružnic *k* a k_2;
13) kružnici k_3 (*E, r* = |*QT*|)*;*
14) vrchol *D* jako průsečík kružnic *k* a k_3;
15) pravidelný pětiúhelník *ABCDE*



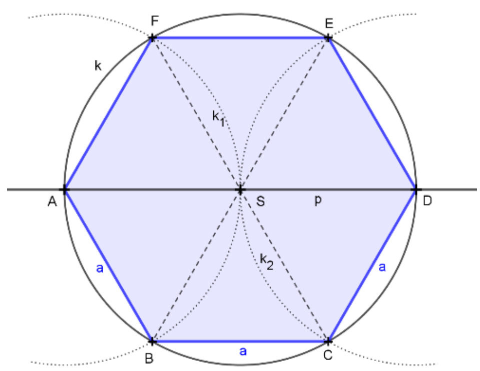
II. pravidelný šestiúhelník (hexagon)

Pravidelný šestiúhelník je rovinný geometrický útvar (pravidelný mnohoúhelník) s šesti vrcholy a šesti shodnými stranami. Jeho vrcholy jsou rovnoměrně rozmístěné na kružnici mu opsané a jeho strany jsou tečnami (tangentami) kružnice vepsané. Součet velikostí vnitřních úhlů pravidelného šestiúhelníku je roven přesně 720°, v obloukové míře 4π (tj. velikost vnitřního úhlu u vrcholu pravidelného šestiúhelníku je 120°).

Pravidelný šestiúhelník je v podstatě složen z šesti shodných rovnostranných trojúhelníků, jejichž úhly při základně i při vrcholu mají velikost 60° = $\frac{\pi}{3}$.

Euklidovská konstrukce pravidelného šestiúhelníku:
Pravidelný šestiúhelník sestrojíme Euklidovskou konstrukcí následovně, tj. sestrojíme:

1) kružnici *k (S, r);*
2) přímku *p*, která prochází bodem *S* a protíná kružnici *k;*
3) průsečíky přímky *p* a kružnice *k* označíme *A* a *D*;
4) kružnici k_1 *(A, r)*;
5) body *B, F* jako průsečíky kružnic *k* a k_1;
6) kružnici k_2 *(D, r)*;
7) body *C, E* jako průsečíky kružnic *k* a k_2;
8) pravidelný šestiúhelník *ABCDEF*



III. pravidelný sedmiúhelník (heptagon)

Pravidelný sedmiúhelník je rovinný geometrický útvar (pravidelný mnohoúhelník) se sedmi vrcholy a se sedmi shodnými stranami. Jeho vrcholy jsou rovnoměrně rozmístěné na kružnici mu opsané a jeho strany jsou tečnami (tangentami) kružnice vepsané. Součet velikostí vnitřních úhlů pravidelného sedmiúhelníku je přesně 900°, v obloukové míře 5π.

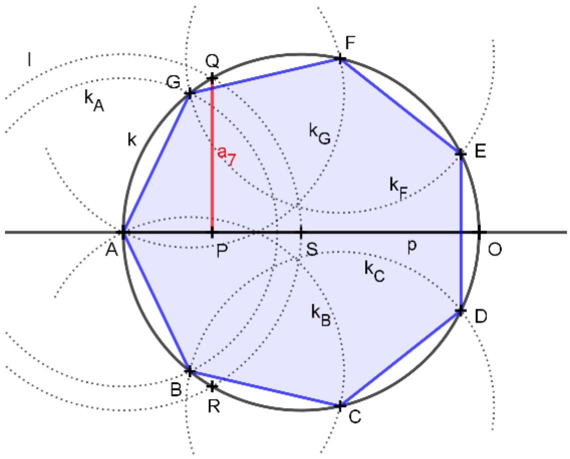
Pravidelný sedmiúhelník je složen ze sedmi shodných rovnoramenných trojúhelníků, jejichž úhly při základně mají velikost $\frac{5}{14}\pi$ a při vrcholu $\frac{2}{7}\pi$.

Konstrukce pravidelného sedmiúhelníku:

Konstrukce pravidelného sedmiúhelníku za použití kružítka a pravítka je pouze přibližná. Neexistuje způsob, jak tuto konstrukci provést pomocí těchto nástrojů úplně přesně.

Pravidelný sedmiúhelník zkonstruujeme následovně, tj. sestrojíme:

1) kružnici *k (S, r);*
2) přímku *p*, která prochází bodem *S* a protíná kružnici *k;*
3) průsečíky přímky *p* a kružnice *k* označíme *A* a *O*;
4) bod *P*, který je středem úsečky *AS*;
5) kružnici *l* (*A, r* = |*SA*|);
6) bod *Q* jako jeden z průsečíků kružnic *k* a *l*;
7) velikost úsečky a_7 = |*PQ*| je délka strany pravidelného sedmiúhelníku;
8) vrcholy *B, G* jako průsečíky kružnic k_A (*A, a* = |*PQ*|) a *k*;
9) vrchol *C* jako průsečík kružnic k_B (*B, a* = |*PQ*|) a *k*, …
10) pravidelný sedmiúhelník *ABCDEFG*



IV. pravidelný osmiúhelník (oktagon)

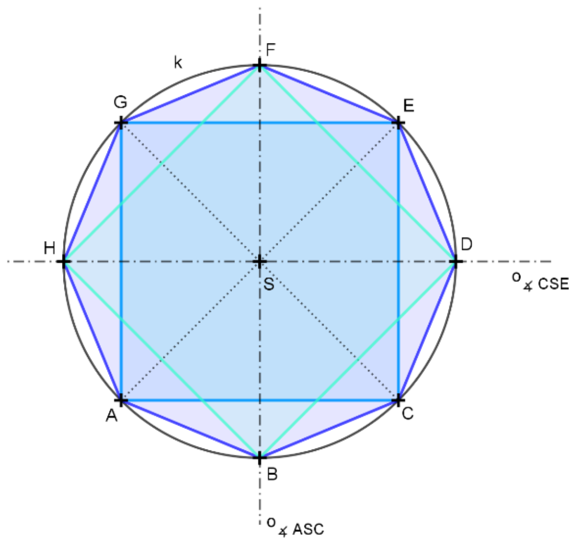
Pravidelný osmiúhelník je rovinný geometrický útvar (pravidelný mnohoúhelník) s osmi vrcholy a s osmi shodnými stranami. Jeho vrcholy jsou rovnoměrně rozmístěné na kružnici mu opsané a jeho strany jsou tečnami (tangentami) kružnice vepsané. Součet velikostí vnitřních úhlů pravidelného osmiúhelníku je přesně 1080°, v obloukové míře 6π.

Pravidelný osmiúhelník je složen z osmi shodných rovnoramenných trojúhelníků, jejichž úhly při základně mají velikost $\frac{3}{8}\pi$ a při vrcholu $\frac{\pi}{4}$ = 45°.

Euklidovská konstrukce pravidelného osmiúhelníku:

Pravidelný osmiúhelník sestrojíme euklidovskou konstrukcí následovně, tj. sestrojíme:

1) čtverec *ACEG* se středem *S*;
2) kružnice *k (S, r* = |*AS*|*);*
3) osy $o_{\angle ASC}$, $o_{\angle CSE}$ úhlů $\angle ASC$, $\angle CSE$;
4) body *B, F* jako průsečíky osy $o_{\angle ASC}$ a kružnice *k*;
5) body *D, H* jako průsečíky osy $o_{\angle CSE}$ a kružnice *k*;
6) pravidelný osmiúhelník *ABCDEFGH*



Poznámka:

Body *B, D, F, H* jsou vrcholy čtverce, který je oproti čtverci *ACEG* otočený kolem bodu *S* o úhel 45° proti směru hodinových ručiček.

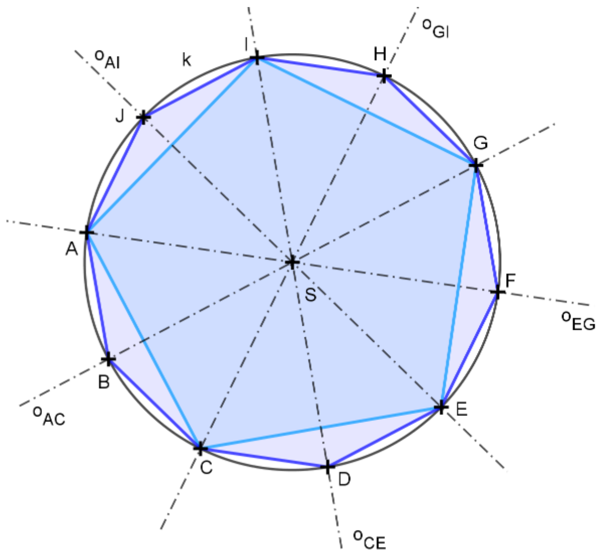
V. pravidelný desetiúhelník

Pravidelný desetiúhelník je rovinný geometrický útvar (pravidelný mnohoúhelník) s deseti vrcholy, s deseti shodnými stranami a s 35 úhlopříčkami. Jeho vrcholy jsou rovnoměrně rozmístěné na kružnici mu opsané a jeho strany jsou tečnami (tangentami) kružnice vepsané. Součet velikostí vnitřních úhlů pravidelného konvexního desetiúhelníku je přesně 1440°, v obloukové míře 8π.

Pravidelný desetiúhelník je složen z deseti shodných rovnoramenných trojúhelníků, jejichž úhly při základně mají velikost $\frac{2}{5}\pi$ a při vrcholu $\frac{\pi}{5}$.

Konstrukce pravidelného desetiúhelníku

Vrcholy pravidelného desetiúhelníku vzniknou jako průsečíky os stran pravidelného pětiúhelníku s kružnicí pravidelnému pětiúhelníku opsanou. Ty pak spolu s vrcholy pravidelného pětiúhelníku tvoří vrcholy pravidelného desetiúhelníku.



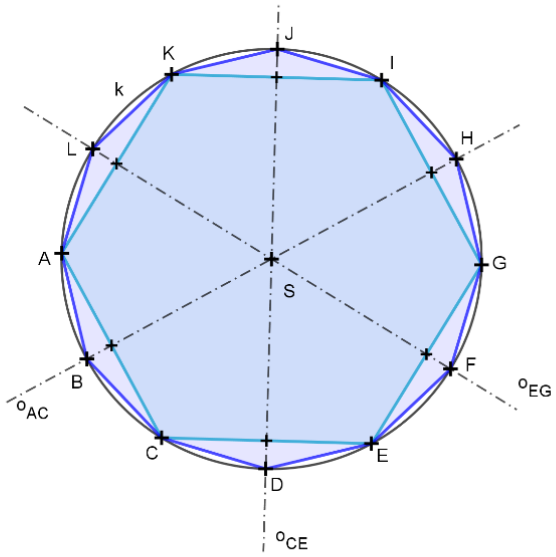
VI. pravidelný dvanáctiúhelník

Pravidelný dvanáctiúhelník je rovinný geometrický útvar (pravidelný mnohoúhelník) s dvanácti vrcholy a s dvanácti shodnými stranami. Jeho vrcholy jsou rovnoměrně rozmístěné na kružnici mu opsané a jeho strany jsou tečnami (tangentami) kružnice vepsané. Součet velikostí vnitřních úhlů pravidelného konvexního dvanáctiúhelníku je přesně 1800°, v obloukové míře 10π.

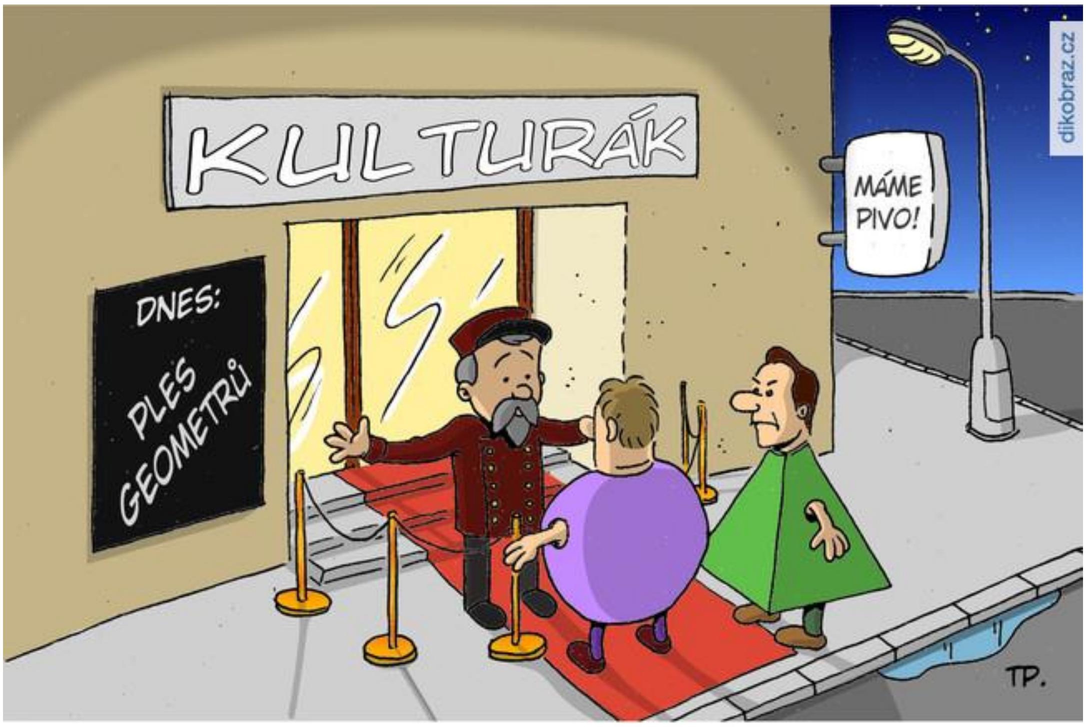
Pravidelný dvanáctiúhelník je složen z dvanácti shodných rovnoramenných trojúhelníků, jejichž úhly při základně mají velikost $\frac{5}{12}\pi$ a při vrcholu $\frac{\pi}{6} = 30°$.

Konstrukce pravidelného dvanáctiúhelníku

Vrcholy pravidelného dvanáctiúhelníku vzniknou jako průsečíky os stran pravidelného šestiúhelníku s kružnicí pravidelnému šestiúhelníku opsanou. Ty pak spolu s vrcholy pravidelného šestiúhelníku tvoří vrcholy pravidelného dvanáctiúhelníku.



V další kapitole se přesuneme do prostorové geometrie...



JE MI LÍTO, PÁNOVÉ, DOVNITŘ VÁS MŮŽU PUSTIT JEN V KVÁDRU.

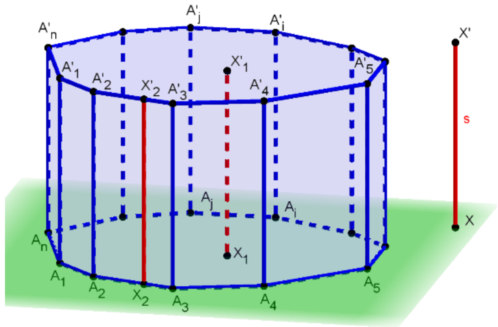
Zdroj: https://dikobraz.cz/geometrie

2. PROSTOROVÁ GEOMETRIE

Tato kapitola je uvedena přehledem základních těles, na nějž navazují vzorové příklady, ale i úlohy k procvičení zaměřené na sestrojení uvedených základních těles ze zadaných prvků. Po té jsou zařazeny příklady věnované určení rovinných řezů hranatých těles, tj. hranolů a jehlanů. Kapitola je zakončena několika příklady k procvičení pravoúhlých podhledů na tělesa.

2.1 ZÁKLADNÍ TĚLESA

2.1.1 Hranol

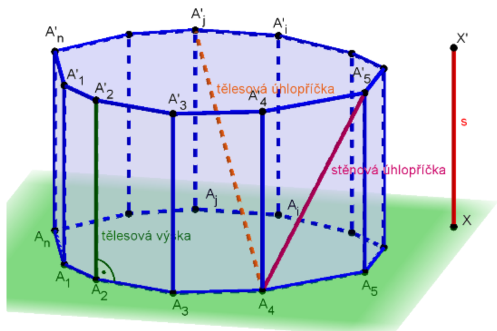


Definice 2.1:

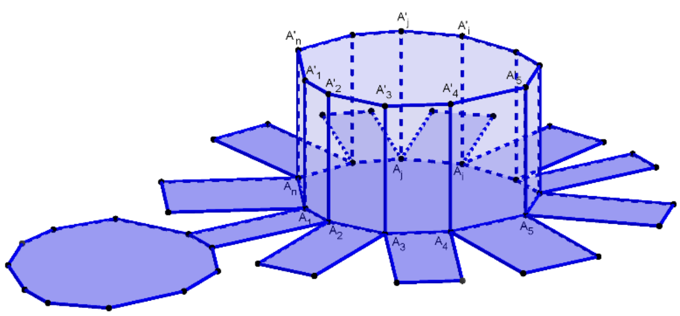
Nechť jsou dány n-úhelník $A_1 \ldots A_n$, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, a úsečka s, která není rovnoběžná s rovinou n-úhelníku $A_1 \ldots A_n$, pak sjednocení všech úseček XX' shodných a souhlasně rovnoběžných s úsečkou s, kde X je bod n-úhelníku $A_1 \ldots A_n$ (a bod X' je bod n-úhelníku $A'_1 \ldots A'_n$) se nazývá ***n*-boký hranol** $A_1 \ldots A_n A'_1 \ldots A'_n$.

Pojmy spojené s hranolem

- Konvexní n-úhelník $A_1 \ldots A_n$, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, z definice 2.1 se nazývá **řídicí *n*-úhelník** n-bokého hranolu $A_1 \ldots A_n A'_1 \ldots A'_n$.
- Konvexní n-úhelníky $A_1 \ldots A_n$, $A'_1 \ldots A'_n$, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, se nazývají **podstavy** nebo **podstavné stěny** n-bokého hranolu $A_1 \ldots A_n A'_1 \ldots A'_n$.
- Strany řídicích konvexních n-úhelníků $A_1 \ldots A_n$, $A'_1 \ldots A'_n$, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, jsou **podstavnými hranami** n-bokého hranolu a vrcholy řídicích konvexních n-úhelníků $A_1 \ldots A_n$, $A'_1 \ldots A'_n$, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, jsou **vrcholy** n-bokého hranolu.
- Roviny, v nichž leží podstavy n-bokého hranolu, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, nazýváme **podstavnými rovinami** nebo **rovinami podstav** n-bokého hranolu.
- **Pobočnými/bočními hranami** n-bokého hranolu rozumíme úsečky $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, ..., $A_nA'_n$, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$. **Pobočnými/bočními stěnami** n-bokého hranolu uvažujeme čtyřúhelníky $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, ..., $A_{n-1}A_nA'_nA'_{n-1}$, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$.



- **Tělesová úhlopříčka** je úsečka omezená dvěma vrcholy n-bokého hranolu, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, které neleží v téže stěně n-bokého hranolu. Úhlopříčka pobočné stěny se nazývá **stěnová úhlopříčka**.
- **Výškou** neboli **tělesovou výškou** n-bokého hranolu, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, rozumíme vzdálenost jeho podstavných rovin nebo jinými slovy řečeno vzdálenost mezi jeho n-úhelníkovými podstavami $A_1 \ldots A_n$ a $A'_1 \ldots A'_n$.
- Souhrn všech pobočných stěn n-bokého hranolu, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, tvoří **plášť** n-bokého hranolu. Obě podstavy n-bokého hranolu společně s pláštěm tvoří jeho **povrch**.
- Zobrazením povrchu n-bokého hranolu, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, do jedné roviny získáme **síť** n-bokého hranolu.

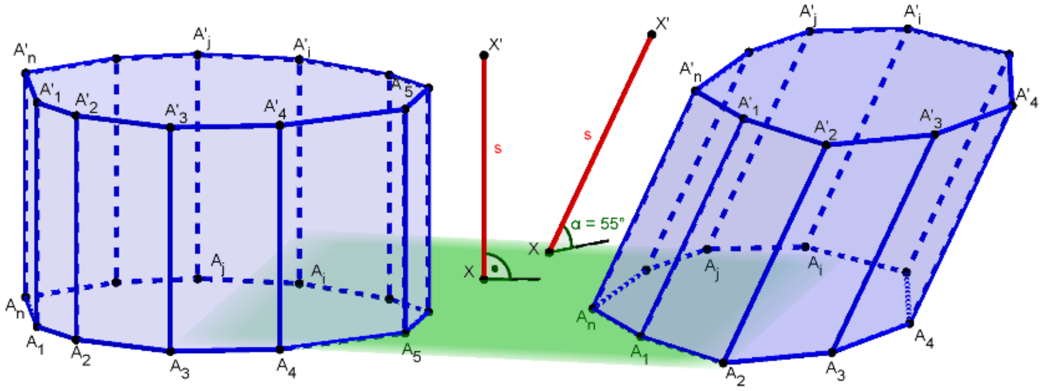


Různé typy hranolů

Hranoly rozdělujeme podle

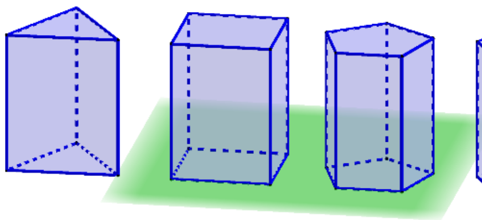
a) **úhlu, který svírají hrany hranolu s podstavnými rovinami:**

- **kolmé hranoly** - je-li úsečka s z definice 2.1 kolmá k rovině podstavného n-úhelníku $A_1 \ldots A_n$, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, jedná se o **kolmý hranol**;
- **kosé hranoly** - není-li úsečka s z definice 2.1 kolmá k rovině podstavného n-úhelníku $A_1 \ldots A_n$, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, jedná se o **kosý hranol**

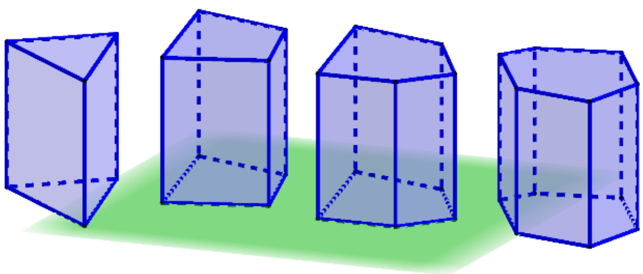


b) **typu řídicího n-úhelníku:**

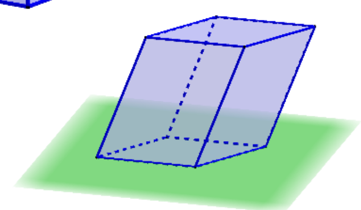
- **pravidelný trojboký, pravidelný čtyřboký, pravidelný pětiboký, pravidelný šestiboký, …, pravidelný *n*-boký hranol**, tj. je-li řídicím n-úhelníkem, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, kolmého hranolu rovnostranný trojúhelník, čtverec, pravidelný pětiúhelník, pravidelný šestiúhelník, …, pravidelný n-úhelník, hovoříme po řadě o **pravidelném trojbokém, pravidelném čtyřbokém, pravidelném pětibokém, pravidelném šestibokém, …, pravidelném *n*-bokém hranolu**.



- **trojboký, čtyřboký, pětiboký, šestiboký, …, *n*-boký hranol**, tj. je-li řídicím mnohoúhelníkem hranolu obecný n-úhelník, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, tedy obecný trojúhelník, obecný čtyřúhelník, obecný pětiúhelník, obecný šestiúhelník, …, obecný n-úhelník, pak hovoříme po řadě o **trojbokém, čtyřbokém, pětibokém, šestibokém, …, *n*-bokém hranolu**.



- **rovnoběžnostěn** – tj. řídicím n-úhelníkem rovnoběžnostěnu je rovnoběžník**.**



Poznámka:

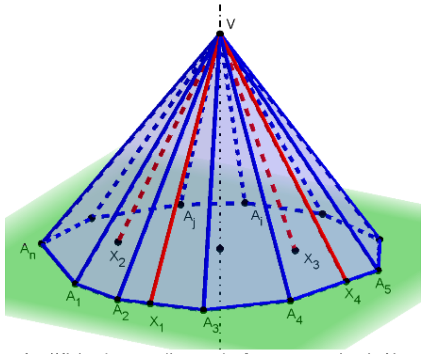
V případě rovnoběžnostěnu jsou vždy dvě stěny spolu navzájem rovnoběžné. Každé dvě takové stěny můžeme považovat za jeho podstavy. Proto u rovnoběžnostěnu nerozlišujeme podstavy a boční stěny.

Poznámka:
V případě pravidelného kolmého *n*-bokého hranolu, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, jsou všechny jeho boční stěny shodné obdélníky.

Speciální příklady hranolů

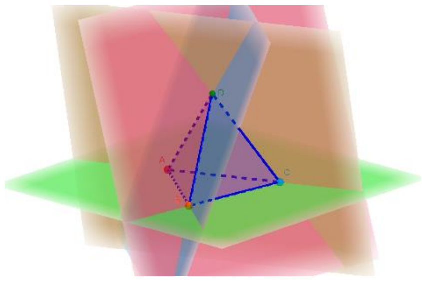
- Pravidelný čtyřboký hranol, jehož všechny stěny jsou shodné čtverce, se nazývá **krychle** (**hexaedr**; patří mezi tzv. Platónská tělesa).
- Čtyřboký hranol, jehož stěny tvoří šest pravoúhlých čtyřúhelníků (zpravidla obdélníků, ale existují i speciální případy, kdy dvojicí protilehlých, navzájem rovnoběžných stěn jsou čtverce) se nazývá **kvádr.** Kvádr má tři skupiny rovnoběžných hran shodné délky.

2.1.2 Jehlan



Definice 2.2:
Nechť jsou dány *n*-úhelník $A_1 \ldots A_n$, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, a bod V, který neleží v rovině *n*-úhelníku $A_1 \ldots A_n$, pak sjednocení všech úseček VX, kde X je libovolný bod *n*-úhelníku $A_1 \ldots A_n$, se nazývá ***n*-boký jehlan** $A_1 \ldots A_n V$.

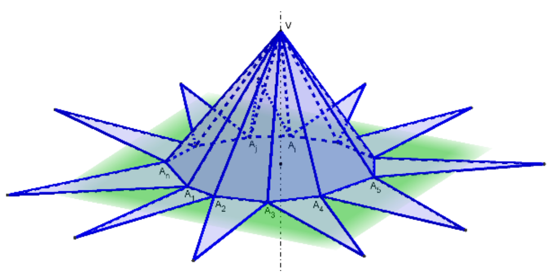
Poznámka:
Tělesa je možné definovat také na základě průniku poloprostorů, analogicky jako se mnohoúhelníky definují jako průniky polorovin. Jako konkrétní příklad uveďme definici trojbokého jehlanu.



Definice 2.3:
Nechť jsou dány nekomplanární body (tj. body neležící v jedné rovině) *A, B, C, V*, pak průnikem poloprostorů *ABCV, BCVA, CVBA* a *VABC* nazýváme **trojboký jehlan** *ABCV* (**čtyřstěn** *ABCV*).

Pojmy spojené s jehlanem

- Konvexní *n*-úhelník $A_1 \ldots A_n$, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, z definice 2.2 se nazývá **řídicí *n*-úhelník** a bod V se nazývá **hlavní vrchol** (stručně jen **vrchol**) *n*-bokého jehlanu.
- Konvexní *n*-úhelník $A_1 \ldots A_n$, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, tvoří **podstavu** nebo-li **podstavnou stěnu** *n*-bokého jehlanu $A_1 \ldots A_n V$.
- Strany řídicího konvexního *n*-úhelníku $A_1 \ldots A_n$, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, jsou **podstavnými hranami** *n*-bokého jehlanu $A_1 \ldots A_n V$ a vrcholy řídicího konvexního *n*-úhelníku $A_1 \ldots A_n$ jsou **podstavnými vrcholy** *n*-bokého jehlanu.
- Rovinu, v níž leží podstava *n*-bokého jehlanu, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, nazýváme **podstavnou rovinou** nebo **rovinou podstavy** *n*-bokého jehlanu.
- **Pobočnými/bočními hranami** *n*-bokého jehlanu rozumíme úsečky A_1V, A_2V, …, A_nV, kde $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$ a kde V je hlavní vrchol *n*-bokého jehlanu. **Pobočnými/bočními stěnami** *n*-bokého jehlanu uvažujeme trojúhelníky A_1A_2V, A_2A_3V, …, $A_{n-1}A_nV$, kde $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$ a kde V je hlavní vrchol *n*-bokého jehlanu.
- Boční stěny *n*-bokého jehlanu, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 4$, jsou tvořeny rovnoramennými trojúhelníky.
- *n*-boký jehlan, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, **nemá tělesové úhlopříčky**, **nemá** ani **stěnové úhlopříčky bočních stěn**, ale *n*-boký jehlan, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 4$, má úhlopříčky podstavy.
- Souhrn všech pobočných stěn *n*-bokého jehlanu, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, tvoří **plášť** *n*-bokého jehlanu. Podstava *n*-bokého jehlanu společně s pláštěm tvoří jeho **povrch**.
- Zobrazením povrchu *n*-bokého jehlanu, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, do jedné roviny získáme **síť** *n*-bokého jehlanu.
- **Výškou** neboli **tělesovou výškou** *n*-bokého jehlanu, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, rozumíme vzdálenost jeho hlavního vrcholu V od podstavné roviny.



- **Stěnovou výškou** *n*-bokého jehlanu, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, rozumíme vzdálenost hlavního vrcholu V od podstavné hrany měřenou v boční stěně *n*-bokého jehlanu.

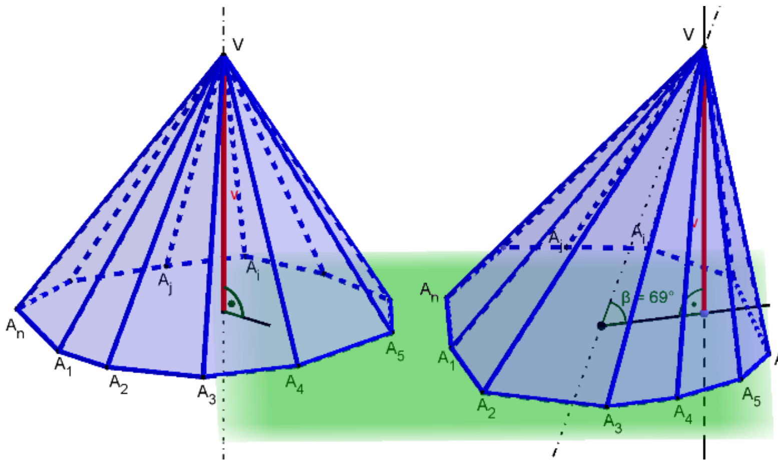
- Je-li podstavou *n*-bokého jehlanu pravidelný konvexní *n*-úhelník $A_1 \dots A_n$, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, a prochází-li kolmice k podstavě *n*-bokého jehlanu, vedená hlavním vrcholem *V,* těžištěm řídicího pravidelného *n*-úhelníku, pak se tento **jehlan** nazývá **pravidelný**. Jinými slovy řečeno: **pravidelný jehlan** je jehlan, jehož podstavou je pravidelný *n*-úhelník a jehož pata tělesové výšky je středem pravidelného mnohoúhelníku.

Různé typy jehlanů

Jehlany rozdělujeme podle

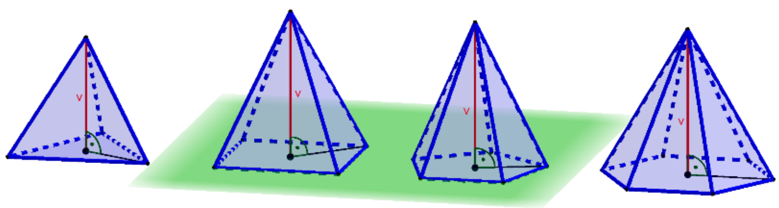
a) **úhlu, který svírá spojnice vrcholu V a středu S podstavy s podstavnou rovinou**, na

- **kolmé jehlany** – osa jehlanu, tj. přímka *VS,* kde *V* je hlavní vrchol jehlanu a *S* je střed řídicího *n*-úhelníku $A_1 \dots A_n$, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, je kolmá k rovině podstavy
- **kosé jehlany** - osa jehlanu, tj. přímka *VS,* kde *V* je hlavní vrchol jehlanu a *S* je střed řídicího *n*-úhelníku $A_1 \dots A_n$, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, svírá s rovinou podstavy libovolný ostrý úhel

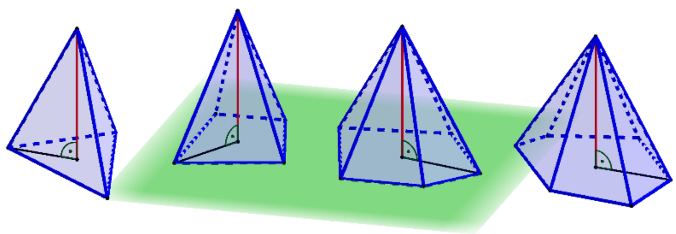


b) **typu řídicího n-úhelníku** na

- **pravidelný trojboký, pravidelný čtyřboký, pravidelný pětiboký, pravidelný šestiboký, …, pravidelný *n*-boký jehlan**, tj. je-li řídicím *n*-úhelníkem, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, jehlanu rovnostranný trojúhelník, čtverec, pravidelný pětiúhelník, pravidelný šestiúhelník, …, pravidelný *n*-úhelník a prochází-li tělesová výška těžištěm řídicího pravidelného *n*-úhelníku, hovoříme po řadě o **pravidelném trojbokém, pravidelném čtyřbokém, pravidelném pětibokém, pravidelném šestibokém, …, pravidelném *n*-bokém jehlanu**



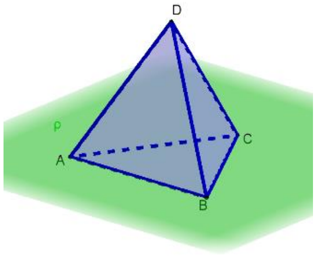
- **trojboký, čtyřboký, pětiboký, šestiboký, …, *n*-boký jehlan**, tj. je-li řídicím mnohoúhelníkem jehlanu obecný *n*-úhelník, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, tedy obecný trojúhelník, obecný čtyřúhelník, obecný pětiúhelník, obecný šestiúhelník, …, obecný *n*-úhelník, pak hovoříme po řadě o **trojbokém, čtyřbokém, pětibokém, šestibokém, …, *n*-bokém jehlanu.**



Poznámka:
Název jehlanu je určen počtem vrcholů řídicího *n*-úhelníku, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$.

Speciální příklady jehlanů a z nich vytvořené mnohostěny

a) **čtyřstěn**



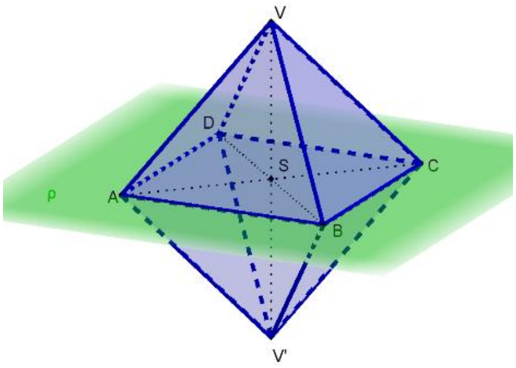
- Trojboký jehlan nazýváme obvykle **čtyřstěn**. Kterýkoliv vrchol čtyřstěnu můžeme pokládat za hlavní vrchol a kteroukoliv jeho stěnu za podstavu.
- Trojboký jehlan, jehož všechny stěny jsou shodné rovnostranné trojúhelníky, se nazývá **pravidelný trojboký jehlan**, resp. **pravidelný čtyřstěn**, neboli **tetraedr** (patří mezi tzv. Platónská tělesa).

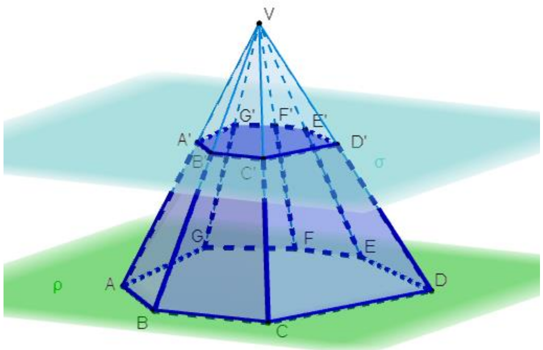
b) **osmistěn**

- Buď *ABCDV* pravidelný čtyřboký jehlan, jehož pobočné stěny jsou rovnostranné trojúhelníky, a buď *V´* bod souměrně sdružený s hlavním vrcholem *V* jehlanu podle roviny čtvercové podstavy *ABCD*, potom těleso složené ze dvou pravidelných čtyřbokých jehlanů *ABCDV* a *ABCDV´* se jmenuje **pravidelný osmistěn** *ABCDVV´*.
- Body *A, B, C, D, V* a *V´* se nazývají **vrcholy osmistěnu**, pobočné trojúhelníkové stěny jehlanů se nazývají **stěny osmistěnu**, hrany jehlanů jsou **hrany osmistěnu**, úsečky *AC, BD* a *VV´* se nazývají **(tělesové) úhlopříčky osmistěnu**. Průsečík *S* úhlopříček se nazývá **střed osmistěnu**.
- Pravidelný osmistěn patří mezi tzv. Platónská tělesa.

c) **n-boký komolý jehlan**

- **Řezem** *n*-bokého jehlanu, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, rovinou rovnoběžnou s podstavou jehlanu a odstraněním části s hlavním vrcholem jehlanu vzniká ***n*-boký komolý jehlan**.

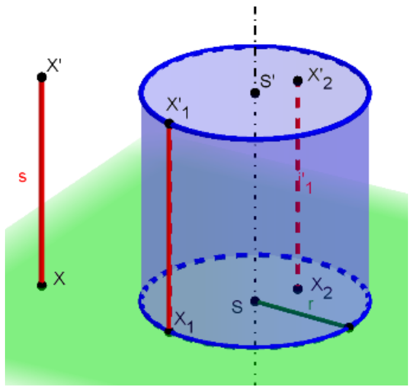




2.1.3 Rotační válec

Definice 2.4:

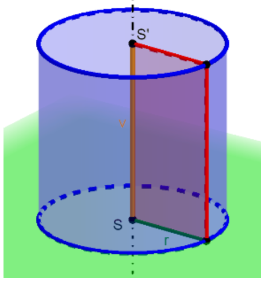
Nechť jsou dány kruh *K* (*S, r*), kde $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$, a úsečka *s*, která není rovnoběžná s rovinou, v níž leží kruh *K*, pak sjednocení všech úseček *XX´* shodných a souhlasně rovnoběžných s úsečkou *s*, kde *X* je bod kruhu *K,* se nazývá **válec s kruhovou podstavou** nebo **kruhový válec.**



Na nižších stupních škol se setkáváme s následující definicí rotačního válce.

Definice 2.5:

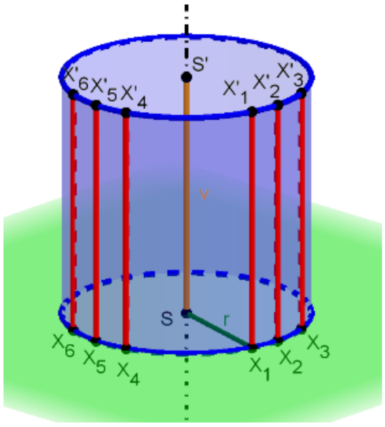
Část prostoru vymezená rotací obdélníku kolem jedné jeho strany se nazývá **rotační válec.** Tato jeho strana *v*, kde $v \in \mathbf{R}$, $v > 0$, kolem níž obdélník rotuje, je **výškou** rotačního válce, s ní sousední strana *r,* kde $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$, je **poloměrem řídicí kružnice** rotačního válce a strana rovnoběžná se stranou *v* daného obdélníku je **površkou/stranou** rotačního válce.



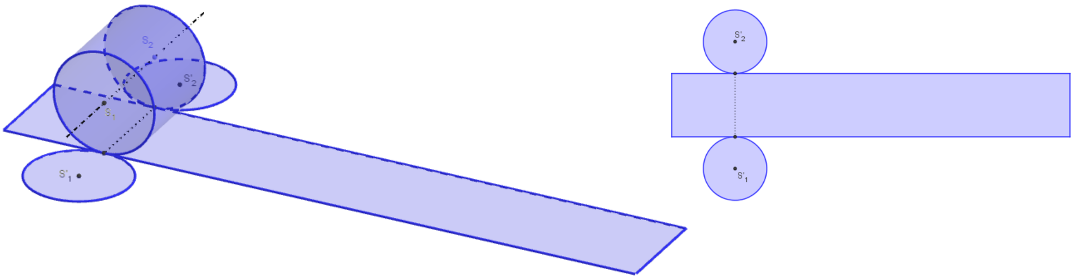
Poznámka:

Pojmy kruhový válec a rotační válec jsou ekvivalentní pojmy.

Pojmy spojené s rotačním válcem



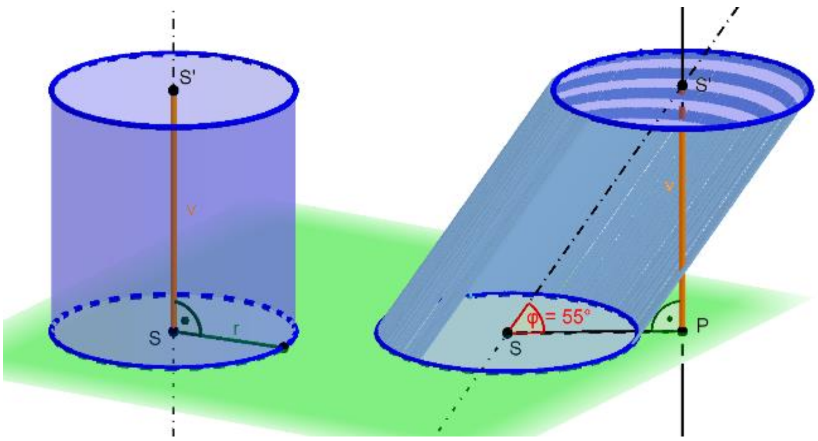
- Kruh *K* z definice 2.4 a jeho obraz *K´* v posunutí daném orientovanou úsečkou *XX´* z definice 2.4 nazýváme **podstavami rotačního válce.**
- Roviny, v nichž leží kruhové podstavy *K, K´* rotačního válce, nazýváme **podstavnými rovinami** rotačního válce.
- **Výškou rotačního válce** rozumíme vzdálenost podstavných rovin nebo jinými slovy řečeno vzdálenost kruhových podstav.
- Spojnici středů kruhových podstav nazýváme **osa rotačního válce.**
- Úsečky *XX´* z definice 2.4, jejichž krajní body *X* jsou body řídicí kružnice podstavného kruhu *K* z definice 2.4 a body *X´* jsou body řídicí kružnice podstavného kruhu *K´,* který je obrazem kruhu *K* v posunutí daném orientovanou úsečkou *XX´*, nazýváme **površkami** rotačního válce.
- Sjednocení površek *XX´* tvoří **plášť** rotačního válce.
- Oba podstavné kruhy *K* (*S, r*), *K´*(*S´, r*), kde $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$, společně s pláštěm rotačního válce tvoří jeho **povrch.**
- **Sítí rotačního válce** je sjednocení pláště a obou kruhových podstav rozvinuté do roviny neboli povrch rotačního válce rozvinutý do roviny.
- **Sítí kolmého rotačního válce** rozumíme obdélník (o jednom rozměru rovném délce obvodu řídicí kružnice kruhových podstav válce a o druhém rozměru rovném výšce *v,* kde $v \in \mathbf{R}$, $v > 0$, válce) s připojenými podstavnými kruhy ke stranám obdélníku s délkami rovnými obvodu řídicích kružnic kruhových podstav rotačního válce.



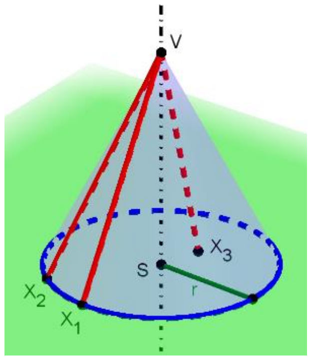
Různé typy rotačního válce

Rotační válce rozdělujeme podle

- ***úhlu, který svírá osa rotačního válce s rovinou podstavy,*** na
  - **kolmý rotační válec** – osa rotačního válce, tj. přímka *SS´*, kde *S* je střed jedné kruhové podstavy a *S´* je střed druhé kruhové podstavy rotačního válce, je kolmá k podstavným rovinám rotačního válce;
  - **kosý rotační válec** - osa rotačního válce, tj. přímka *SS´,* kde *S* je střed jedné kruhové podstavy a *S´* je střed druhé kruhové podstavy rotačního válce, svírá s podstavnými rovinami rotačního válce libovolný ostrý úhel.



2.1.4 Rotační kužel



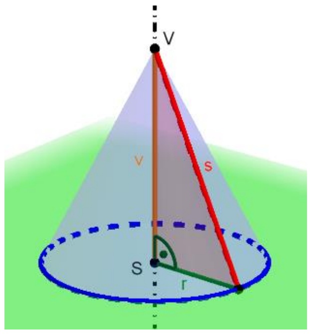
Definice 2.6:

Nechť je dán kruh K (S, r), kde $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$, a bod V, který neleží v rovině kruhu K, pak sjednocení všech úseček VX, kde X je bod kruhu K, se nazývá **kužel s kruhovou podstavou**. Bod V se nazývá **vrchol kužele**.

Na nižších stupních škol se setkáváme s následující definicí rotačního kužele.

Definice 2.7:

Část prostoru vymezená rotací pravoúhlého trojúhelníku kolem jedné jeho odvěsny se nazývá **rotační kužel.**

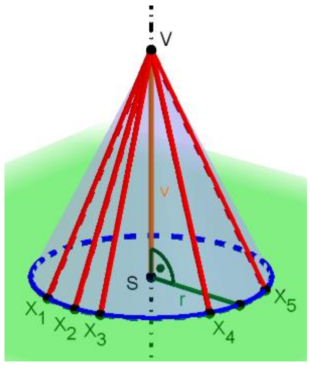


Tato jeho odvěsna v, kde $v \in \mathbf{R}$, $v > 0$, je **výškou** rotačního kužele, druhá odvěsna r, kde $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$, je **poloměrem řídicí kružnice** rotačního kužele a přepona s, kde $s \in \mathbf{R}$, $s > 0$, pravoúhlého trojúhelníku je **površkou/stranou** rotačního kužele.

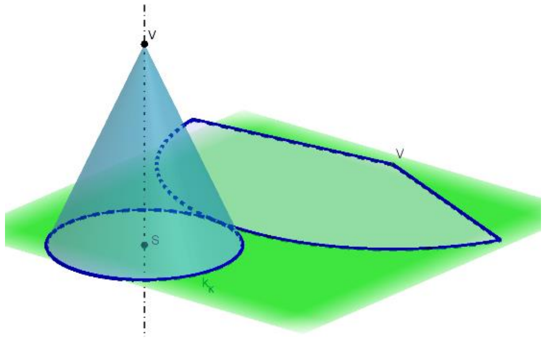
Poznámka:

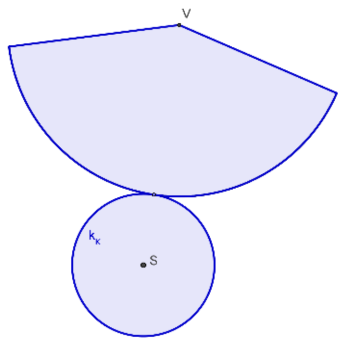
Pojmy kužel s kruhovou podstavou a rotační kužel jsou ekvivalentní pojmy.

Pojmy spojené s rotačním kuželem

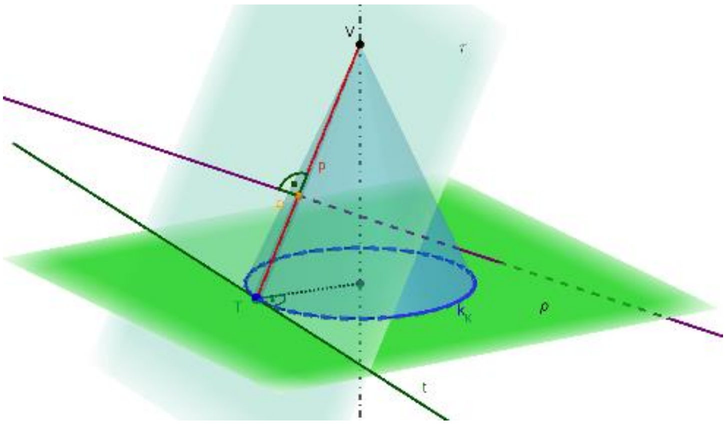


- Kruh K z definice 2.6 nazýváme **(kruhovou) podstavou rotačního kužele.**
- Rovinu, v níž leží kruhová podstava rotačního kužele, nazýváme **podstavnou rovinou** rotačního kužele.
- **Výškou rotačního kužele** rozumíme vzdálenost vrcholu V rotačního kužele z definice 2.6 od podstavné roviny nebo jinými slovy řečeno od kruhové podstavy.
- Spojnici středu S kruhové podstavy a vrcholu V rotačního kužele nazýváme **osa rotačního kužele.**
- Úsečky VX z definice 2.6, jejichž krajní body X jsou body řídicí kružnice podstavného kruhu K z definice 2.6, nazýváme **površkami** rotačního kužele.
- Sjednocení površek VX tvoří **plášť** rotačního kužele.
- Podstavný kruh K (S, r), kde $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$, společně s pláštěm rotačního kužele tvoří jeho **povrch.**
- **Sítí rotačního kužele** je sjednocení pláště a kruhové podstavy rozvinuté do roviny neboli povrch rotačního kužele rozvinutý do roviny.
- **Sítí rotačního kužele** rozumíme kruhovou výseč (o poloměru rovném délce površky XX', tj. $s = |XX'|$, a o délce kruhového oblouku rovné obvodu řídicí kružnice kruhové podstavy rotačního kužele, tj. $o = 2\pi r$, kde $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$ je poloměr podstavného kruhu) s připojeným podstavným kruhem ke kruhovému oblouku kruhové výseče.

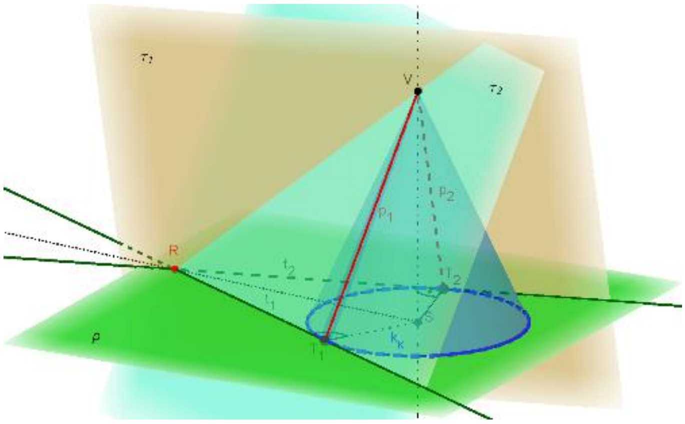




- **Tečnou rovinou** τ rotačního kužele rozumíme takovou rovinu, jejímž průnikem s rotačním kuželem je právě jedna površka $p \equiv TV$ pláště rotačního kužele. Površku p nazýváme **dotykovou površkou** tečné roviny τ s pláštěm rotačního kužele.



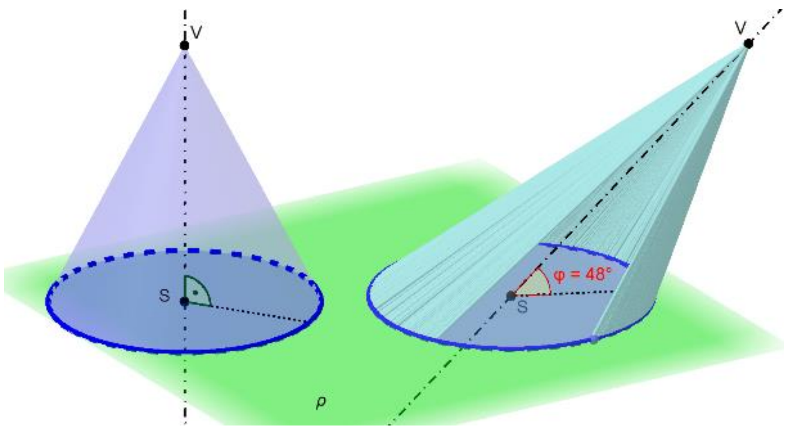
- Kolmice k tečné rovině τ vedená libovolným bodem P dotykové površky p se nazývá **normála rotačního kužele** v tomto bodě.
- Tečná rovina rotačního kužele vždy prochází vrcholem V daného rotačního kužele.
- Každým vnějším bodem rotačního kužele procházejí právě dvě tečné roviny rotačního kužele.



Různé typy rotačního kužele

Rotační kužele rozdělujeme podle

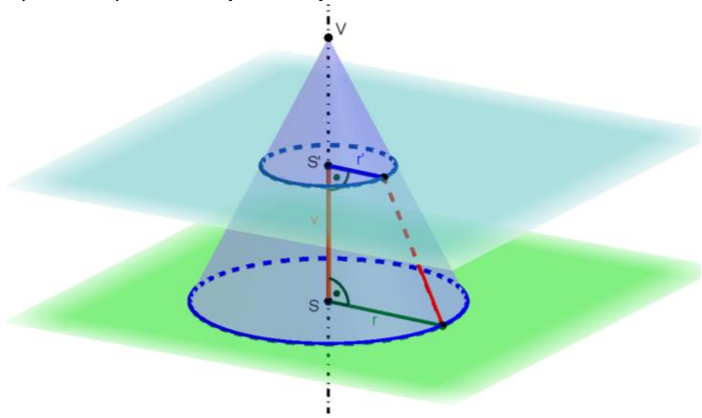
- **úhlu, který svírá osa rotačního kužele s rovinou podstavy**, na
    - **kolmý rotační kužel** – osa rotačního kužele, tj. přímka *SV,* kde *S* je střed kruhové podstavy a *V* je vrchol rotačního kužele, je kolmá k podstavné rovině rotačního kužele;
    - **kosý rotační kužel** - osa rotačního kužele, tj. přímka *SV,* kde *S* je střed kruhové podstavy a *V* je vrchol rotačního kužele, svírá s podstavnou rovinou rotačního kužele libovolný ostrý úhel.



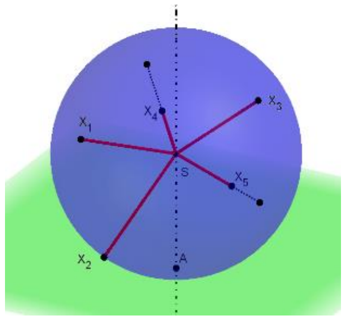
Speciální příklady rotačního kužele

a) **rotační komolý kužel**

- **Řezem rotačního kužele** rovinou rovnoběžnou s rovinou kruhové podstavy a odstraněním části s vrcholem **vzniká rotační komolý kužel.**
- Rovina kruhové podstavy a rovina řezu jsou **podstavnými rovinami** rotačního komolého kužele.
- Kruhová podstava rotačního kužele a vzniklý kruhový řez tvoří **podstavy rotačního komolého kužele**.
- Vzdálenost v, kde $v \in \mathbf{R}$, $v > 0$, kruhových podstav rotačního komolého kužele se nazývá **výška rotačního komolého kužele**.
- **Síť rotačního komolého kužele** je sjednocení obou kruhových podstav a pláště rozvinuté do roviny, tj. v rovině zobrazená výseč mezikruží ve spojení s oběma kruhovými podstavami, přitom ke kruhovým obloukům mezikruží jsou připojeny odpovídající kruhové podstavy.



2.1.5 Koule

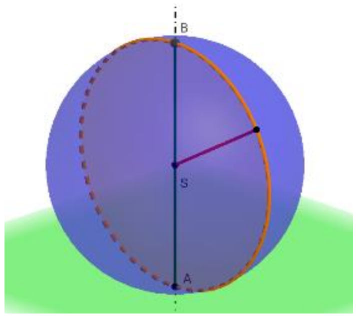


Definice 2.8:
Nechť je dán bod S a nenulová délka r, kde $r \in \mathbf{R}$, pak **koulí** $\kappa\,(S, r)$ rozumíme množinu všech bodů v prostoru, které mají od daného bodu S vzdálenost nejvýše rovnou dané nenulové délce r.

Na nižších stupních škol se setkáváme s následující definicí koule.

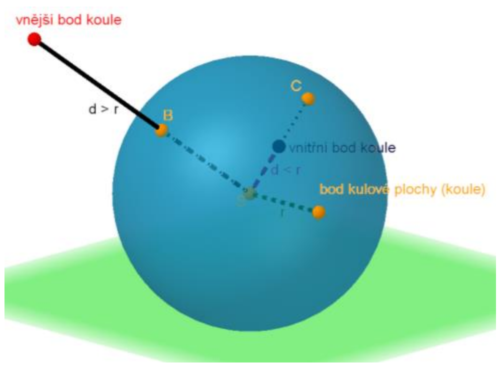
Definice 2.9:
Koule $\kappa\,(S, r)$, kde $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$, je rotační těleso, které vznikne rotací kruhu $K\,(S, r)$ kolem jeho libovolného průměru.

Definice 2.10:
Nechť je dán bod S a nenulová délka r, kde $r \in \mathbf{R}$, pak **kulovou plochou** $\lambda\,(S, r)$ rozumíme množinu všech bodů v prostoru, které mají od daného bodu S tutéž vzdálenost r.



Pojmy spojené s koulí a kulovou plochou

- Bod S z definic 2.8 a 2.9 se nazývá **střed koule** a nenulová reálná vzdálenost r z týchž dvou definic se nazývá **poloměr koule**.
- Bod S z definice 2.10 se nazývá **střed kulové plochy** a nenulová reálná vzdálenost r z téže definice se nazývá **poloměr kulové plochy**.
- **Kulová plocha** tvoří plášť koule.
- Nechť d, r jsou nenulové reálné vzdálenosti, přitom r představuje poloměr koule. Podle vzdálenosti d bodů prostoru od středu S koule rozeznáváme **vnitřní body koule** ($0 \leq d < r$), **vnější body koule** ($d \geq r$) a **body kulové plochy (koule)** ($d = r$).



Souměrnosti koule a kulové plochy

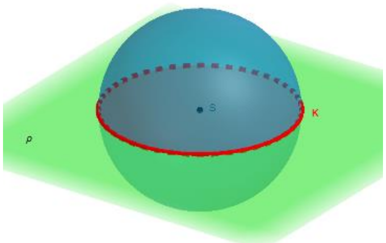
Koule $\kappa(S, r)$ i kulová plocha $\lambda(S, r)$, $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$, mají nekonečně mnoho os souměrnosti a nekonečně mnoho rovin souměrnosti. Všechny osy i roviny souměrnosti procházejí středem S dané koule, resp. kulové plochy.

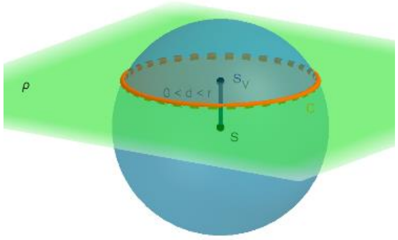
Průnik koule a roviny

Průnik koule $\kappa(S, r)$, kde $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$, s rovinou ρ je závislý na vzdálenosti d, kde $d \in \mathbf{R}$, $d \geq 0$, roviny ρ od středu S koule.

a) Je-li $d = 0$, pak střed S koule leží v rovině ρ a průnikem roviny ρ a koule je tzv. **hlavní kruh**, tj. kruh K se středem S a s poloměrem r. Rovinu ρ nazýváme **sečnou rovinou.**

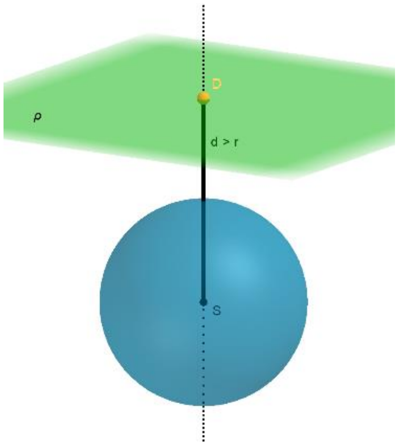
b) Je-li $0 < d < r$, je průnikem roviny ρ a dané koule tzv. **vedlejší kruh** C se středem S_V, kde S_V je pata kolmice vedené bodem S k rovině ρ. Pro poloměr r_V kruhu C platí $r_V{}^2 = r^2 - d^2$. Rovinu ρ nazýváme opět **sečnou rovinou.**

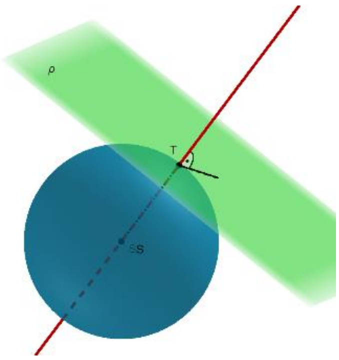




c) Je-li $d > r$, je **průnik** roviny ρ a koule **prázdný**.

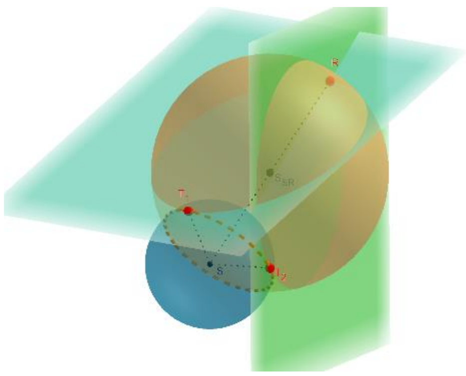
d) Je-li $d = r$, tj. je-li vzdálenost roviny ρ od středu S koule rovna poloměru r koule, je průnik roviny ρ a koule jednobodový. V takovém případě je průnikem roviny ρ a koule **pata *T*** kolmice vedené z bodu S k rovině ρ. Rovina ρ se nazývá **tečná rovina** koule, bod T se nazývá **dotykový bod** tečné roviny a přímka $n \equiv ST$ se nazývá **normála** koule v bodě T.





Poznámka:

Vnějším bodem R koule $\kappa(S, r)$, kde $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$, prochází nekonečně mnoho tečných rovin k dané kouli. Body dotyků tečných rovin s příslušnou kulovou plochou leží na vedlejší, resp. hlavní kružnici kulové plochy. Vedlejší, resp. hlavní kružnice se sestrojí jako průniková křivka příslušné kulové plochy a koule sestrojené nad průměrem SR. (*Analogie k sestrojení tečen z vnějšího bodu ke kružnici v rovině*)



2.1.6 Mnohostěn

Definice 2.11:

Těleso, jehož hranice je sjednocením hraničních mnohoúhelníků, které mají společné pouze strany a žádné dva mnohoúhelníky neleží v téže rovině, se nazývá **mnohostěn** (***n*-stěn**), $n \in \mathbf{N}$.

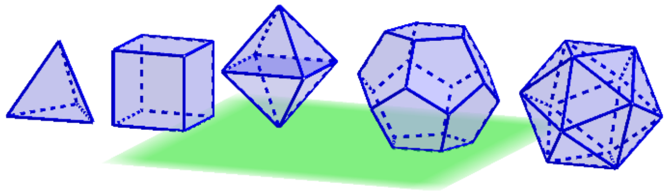
2.1.7 Platónská tělesa

Definice 2.12:

Konvexní mnohostěn, jehož všechny stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky a v jehož každém vrcholu se stýká stejný počet hran, se nazývá **pravidelný mnohostěn** (**Platónské těleso**).

Je známa existence právě pěti Platónských těles:

- **pravidelný čtyřstěn** (tetraedr)
- **krychle** (hexaedr)
- **pravidelný osmistěn** (oktaedr)
- **pravidelný dvanáctistěn** (dodekaedr)
- **pravidelný dvacetistěn** (ikosaedr)



2.2 SESTROJENÍ ZÁKLADNÍCH TĚLES ZE ZADANÝCH PRVKŮ

Obsahem této podkapitoly jsou vzorové příklady, ale i úlohy k procvičení načrtnutí, resp. sestrojení základních těles ze zadaných prvků. Na weblinku https://www.geogebra.org/m/cmnffkdq se v tzv. GeoGebra knize s názvem „Základní plochy a tělesa_student" nacházejí prostorová zadání úloh k procvičení v podobě dynamických online appletů vytvořených v programu GeoGebra. U těchto online appletů jsou též zobrazeny nástroje a příkazy programu, pomocí nichž je možné ve 3D okně programu GeoGebra zkusit úlohy prostorově vyřešit. Vzorová řešení úloh k procvičení jsou umístěna v GeoGebra knize s názvem „Základní plochy a tělesa_učitel" nacházející se na weblinku https://www.geogebra.org/m/kaggkbfq.

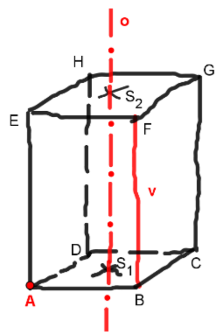
V náčrtcích užíváme principů a pravidel *volného rovnoběžného promítání* (VRP) uvedených např. na weblinku https://www.geogebra.org/m/vjea8fyy, v obrázcích sestrojených těles ve 3D okně programu GeoGebra využíváme principů *rovnoběžného promítání* (RP), které jsou uvedeny tamtéž.

2.2.1 Sestrojení hranolů

<u>Příklad 2.1:</u>

Načrtněte a stručně slovně či symbolicky zapište postup sestrojení kolmého pravidelného čtyřbokého hranolu *ABCDEFGH* v RP či ve VRP, jsou-li dány vrchol *A* čtvercové podstavy *ABCD* hranolu, osa *o* hranolu procházející středy čtvercových podstav *ABCD, EFGH* a je-li dána výška *v* hranolu.

Vzorové řešení:



Pro sestrojení kolmého pravidelného čtyřbokého hranolu *ABCDEFGH* v RP (VRP) nejprve provedeme náčrtek, ve kterém barevně vyznačíme zadané prvky. Dále je třeba si uvědomit, v jakém vztahu jsou zadané prvky vzhledem k zobrazovanému tělesu a jaké objekty je třeba postupně sestrojit.

Je-li dána osa *o* hranolu procházející středy čtvercových podstav hranolu a vrchol *A* čtvercové podstavy *ABCD*, sestrojíme nejprve rovinu ρ kolmou k ose *o* hranolu a procházející bodem *A.* Osa *o* hranolu protne rovinu ρ ve středu S_1 čtvercové podstavy *ABCD.* V rovině ρ sestrojíme čtverec *ABCD* se středem v bodě S_1.

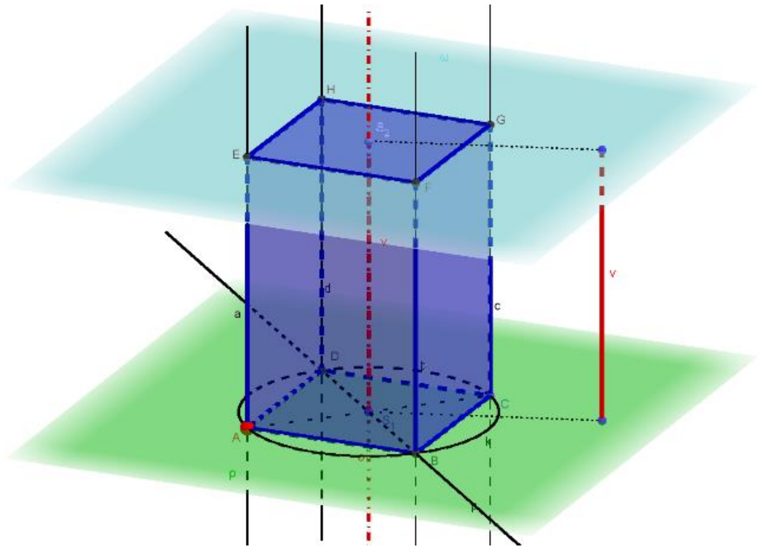
Dále lze řešit úlohu různými způsoby. Je-li známa výška *v* hranolu, lze horní čtvercovou podstavu *EFGH* sestrojit buď posunutím čtverce *ABCD* ve směru osy *o* o délku výšky *v*, nebo postupným zkonstruováním středu S_2 horní čtvercové postavy na ose *o* ve vzdálenosti výšky *v* hranolu od středu S_1, přímek rovnoběžných s osou *o* hranolu a procházejících vrcholy čtverce *ABCD*, roviny ω kolmé k ose *o* hranolu a procházející bodem S_2. Vrcholy čtverce *EFGH* jsou po řadě průsečíky roviny ω s přímkami rovnoběžnými s osou *o* hranolu a procházejícími vrcholy čtverce *ABCD*.

Na závěr sestrojíme průmět pravidelného čtyřbokého hranolu *ABCDEFGH* v RP (ve VRP), stylem čar rozlišíme viditelnost jeho hran. V prostoru má úloha 2 řešení, ta jsou rovinově souměrná podle roviny ρ. Čtvercovou podstavu *EFGH* lze totiž sestrojit v jednom ze dvou poloprostorů, jež v prostoru určuje rovina ρ.

Symbolický zápis konstrukce:

1. $\rho;\ A \in \rho \wedge o \perp \rho$
2. $S_1;\ S_1 \equiv o \cap \rho$
3. $C;\ SS\,(S_1, A \to C)$
4. $\sigma;\ \sigma \equiv (A, o)$
5. $p;\ S_1 \in p \wedge p \perp \sigma$
6. $k;\ k\,(S_1, |AS_1|) \wedge k \in \rho$
7. $B, D;\ B, D \equiv k \cap p \wedge B \not\equiv D$
8. $S_2;\ S_2 \in o \wedge |S_1S_2| = v$
9. $a, b, c, d;\ A \in a \wedge a \,//\, o,$
   $B \in b \wedge b \,//\, o, \ldots$
10. $\omega;\ S_2 \in \omega \wedge o \perp \omega$
11. $E, F, G, H;\ E \equiv a \cap \omega,\ F \equiv b \cap \omega,$
    $G \equiv c \cap \omega,\ H \equiv d \cap \omega$
12. kvádr ABCDEFGH

Prostorová konstrukce:



Úloha 2.1:

V RP či ve VRP načrtněte a stručně slovně či symbolicky zapište postup sestrojení kolmého pravidelného čtyřbokého hranolu *ABCDA´B´C´D´*, jsou-li dány vrcholy *A* a *B´* hranolu a rovina α, v níž leží čtverec *ABCD.*

Úloha 2.2:

V RP či ve VRP načrtněte a stručně slovně či symbolicky zapište postup sestrojení kolmého hranolu *ABCDEFGH* s kosočtvercovou podstavou *ABCD* ležící v rovině ρ, která je dána vrcholem *A* hranolu a přímkou *u.* Přitom platí, že bod *A* neleží na přímce *u.* Na přímce *u* leží úhlopříčka *BD* kosočtverce o dané délce *f*. Dále je dána výška *v* hranolu.

Úloha 2.3:

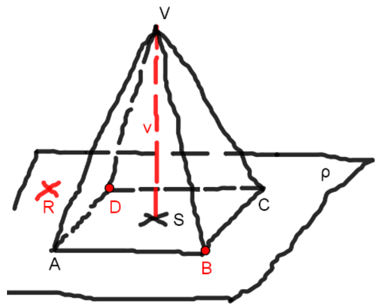
V RP či ve VRP načrtněte a stručně slovně či symbolicky zapište postup sestrojení kolmého pravidelného šestibokého hranolu, jehož šestiúhelníková podstava *ABCDEF* leží v rovině ρ. Přitom rovina ρ je určena středem *S* šestiúhelníkové podstavy *ABCDEF* a přímkou $m \equiv MN$, na níž leží podstavná hrana *AB* hranolu. Bod *S* na přímce *m* neleží. Dále je dána výška *v* hranolu.

2.2.2 Sestrojení jehlanů

Příklad 2.2:

V RP či ve VRP načrtněte a stručně slovně či symbolicky zapište postup sestrojení pravidelného čtyřbokého jehlanu *ABCDV* se čtvercovou podstavou *ABCD* ležící v rovině *ρ.* Rovina *ρ* je určena vrcholy *B, D* čtvercové podstavy a obecným bodem *R,* který neleží na přímce *BD*. Dále je dána výška *v* jehlanu.

Vzorové řešení:



Pro sestrojení pravidelného čtyřbokého jehlanu *ABCDV* v RP nebo ve VRP nejprve provedeme náčrtek, ve kterém barevně vyznačíme zadané prvky. Dále je třeba si uvědomit, v jakém vztahu jsou zadané prvky vzhledem k sestrojovanému tělesu a jaké objekty je třeba postupně sestrojit.

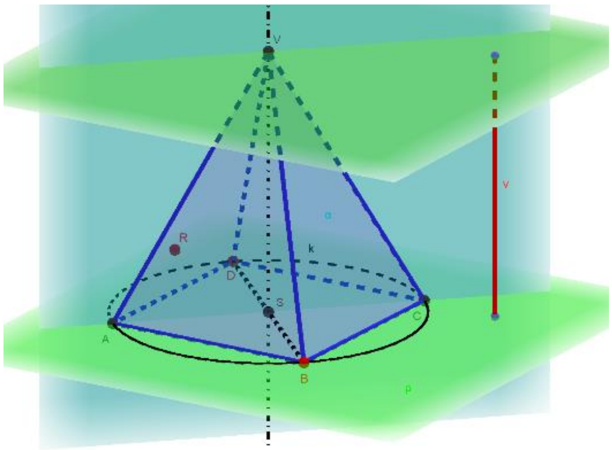
Jsou-li dány tři nekolineární body (tj. body, které neleží v jedné přímce) *B, D* a *R,* můžeme jimi proložit rovinu ρ. V rovině ρ sestrojíme čtverec *ABCD* se středem *S*. Bodem *S* vedeme kolmici k rovině ρ. Na ni naneseme v jednom poloprostoru s hraniční rovinou ρ danou velikost výšky *v* jehlanu, čímž získáme hlavní vrchol *V* jehlanu. V prostoru má úloha 2 řešení, ta jsou rovinově souměrná podle roviny ρ.

Na závěr sestrojíme průmět pravidelného čtyřbokého jehlanu *ABCDV* v RP (ve VRP) a stylem čar rozlišíme viditelnost jeho hran.

Symbolický zápis konstrukce:

1. ρ; ρ ≡ BDR
2. S; IBSI = ISDI ∧ S ∈ BD
3. o; S ∈ o ∧ o ⊥ ρ
4. k; k (S, IBSI) ∧ k ∈ ρ
5. α; S ∈ α ∧ α ⊥ BD
6. A, C; A , C ≡ α ∩ k
7. čtverec ABCD
8. V; V ∈ o ∧ ISVI = v
9. čtyřboký jehlan ABCDV

Prostorová konstrukce:



Úloha 2.4:

V RP či ve VRP načrtněte a stručně slovně či symbolicky zapište postup sestrojení pravidelného šestibokého jehlanu *ABCDEFV* s šestiúhelníkovou podstavou *ABCDEF* ležící v dané rovině *α*. Dále je dán vrchol *C* šestiúhelníkové podstavy ležící v rovině *α* a hlavní vrchol *V* jehlanu, který v rovině *α* neleží.

Úloha 2.5:

V RP či ve VRP načrtněte a stručně slovně či symbolicky zapište postup sestrojení pravidelného čtyřbokého jehlanu *ABCDV*, je-li dán střed *S* čtvercové podstavy *ABCD*, vrchol *A* čtvercové podstavy ABCD*,* bod *O* na ose *o* jehlanu a výška *v* jehlanu.

Úloha 2.6:

V RP či ve VRP načrtněte a stručně slovně či symbolicky zapište postup sestrojení pravidelného osmistěnu *ABCDVV´* s osou *o* ≡ *QR*, která je dána body *Q* a *R*, a s vrcholem *A,* jenž na ose *o* neleží.

2.2.3 Sestrojení rotačního válce

Úloha 2.7:

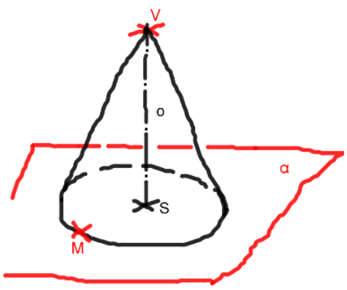
V RP či ve VRP načrtněte a stručně slovně či symbolicky zapište postup sestrojení kolmého rotačního válce, jsou-li dány středy *S, S´* obou kruhových podstav a tečna *t* ≡ *QR*, daná body *Q, R*, kruhové podstavy se středem *S.*

2.2.4 Sestrojení rotačních kuželů

Příklad 2.3:

V RP či ve VRP načrtněte a stručně slovně či symbolicky zapište postup sestrojení kolmého rotačního kužele, je-li dána rovina α, v níž leží kruhová podstava rotačního kužele. V rovině α je daný bod *M*, který leží na řídicí kružnici kruhové podstavy rotačního kužele. Dále je dán vrchol *V* rotačního kužele.

Vzorové řešení:



Pro sestrojení kolmého rotačního kužele v RP (ve VRP) nejprve provedeme náčrtek, ve kterém barevně vyznačíme zadané prvky. Dále je třeba si uvědomit, v jakém vztahu jsou zadané prvky vzhledem k sestrojovanému tělesu a jaké objekty je třeba postupně sestrojit.

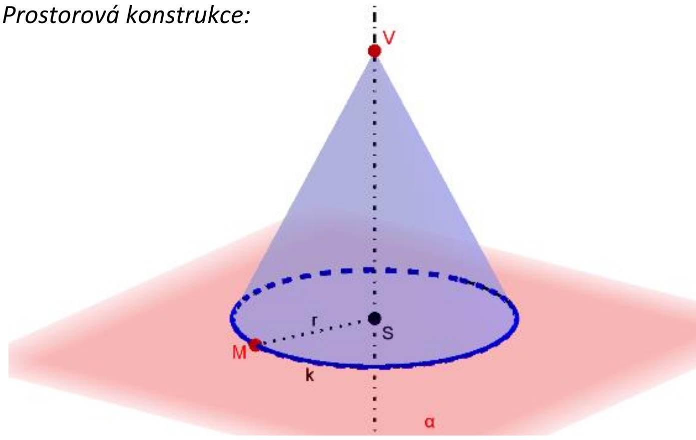
Je-li dán vrchol *V* kužele a rovina α, ve které má ležet kruhová podstava kužele, lze bodem *V* sestrojit osu *o* kužele jako kolmici k rovině α. Průsečík osy *o* a roviny α je střed *S* kruhové podstavy rotačního kužele. A protože je dán bod *M*, který leží na řídicí kružnici kruhové podstavy rotačního kužele, určuje velikost úsečky *SM* poloměr řídicí kružnice kruhové podstavy rotačního kužele. Kruhovou podstavu v rovině α vyrýsujeme a nakonec sestrojíme obrysové površky rotačního kužele. (*Obrysové površky se sestrojují pomocí konstrukce tečen* *z vnějšího bodu k elipse.*) Dotykové body površek s průmětem řídicí kružnice rozdělují kružnici na dva kruhové oblouky, u nichž je třeba stylem čar rozlišit jejich viditelnost.

Úloha má v prostoru právě jedno řešení díky jednoznačnému zadání vrcholu *V* kužele a podstavné roviny α.

Symbolický zápis konstrukce:

1. o; V ∈ o ∧ o ⊥ α
2. S; S ≡ o ∩ α
3. k; k (S, ISMI) ∧ k ∈ α
4. kolmý rotační kužel

Prostorová konstrukce:



Úloha 2.8:

V RP či ve VRP načrtněte a stručně slovně či symbolicky zapište postup sestrojení kolmého rotačního kužele, je-li dána rovina α, v níž leží kruhová podstava kužele. V rovině α je daný bod *M*, který leží na řídicí kružnici kruhové podstavy kužele. Dále je dán obecný bod *O* osy *o* kužele a výška *v* kužele.

Úloha 2.9:

V RP či ve VRP načrtněte a stručně slovně či symbolicky zapište postup sestrojení kolmého rotačního kužele, je-li dáno: střed *S* kruhové podstavy kužele, vrchol *V* kužele a bod *Q* na plášti kužele.

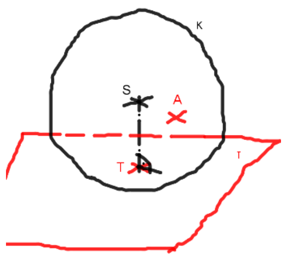
2.2.5 Sestrojení koulí a jejich tečných rovin

Příklad 2.4:

V RP či ve VRP načrtněte a stručně slovně či symbolicky zapište postup sestrojení koule, je-li dán bod *A* kulové plochy koule a tečná rovina τ koule s daným bodem dotyku *T*.

Vzorové řešení:

Pro sestrojení koule v RP či ve VRP nejprve provedeme náčrtek, ve kterém barevně vyznačíme zadané prvky. Dále je třeba si uvědomit, v jakém vztahu jsou zadané prvky vzhledem k sestrojovanému tělesu a jaké objekty je třeba postupně sestrojit.



Je-li dána tečná rovina τ koule s bodem dotyku *T*, pak střed *S* koule leží na přímce *o*, která prochází bodem *T* kolmo k rovině τ. (*normála koule sestrojená v bodě T*). Je-li dán kromě bodu *T* ještě další bod *A* kulové plochy koule, pak oba body *T, A* leží na jedné z hlavních kružnic sestrojované koule.

Pokud bychom uvažovali rovinnou úlohu, pak střed hlavní kružnice, na níž leží body *A, T*, by ležel na ose úsečky *AT*. Ale protože úlohu řešíme v prostoru, leží střed *S* koule v rovině ρ souměrnosti úsečky *AT*. Rovinu ρ sestrojíme středem S_{AT} úsečky *AT* kolmo k úsečce *AT*. A protože jsou již sestrojené dva objekty (přímka *o* a rovina ρ), na nichž leží střed *S* koule, je jejich průsečíkem.

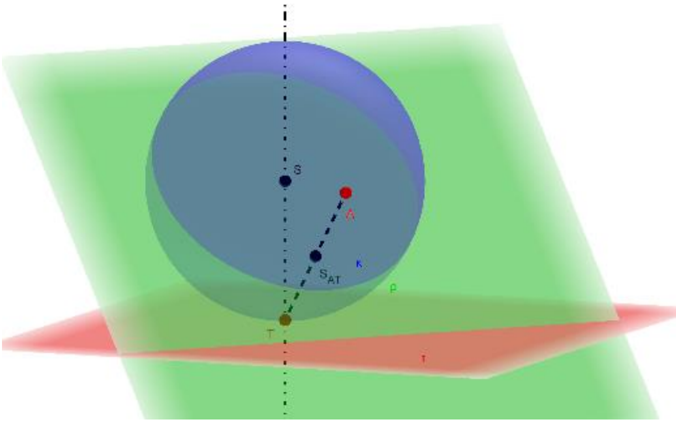
Poloměr sestrojované koule je určen velikostí např. úsečky *ST*. Na závěr vyrýsujeme obrysy koule v závislosti na pravidlech promítání, ve kterém kouli zobrazujeme.

Úloha je danými prvky určena jednoznačně, tj. má v prostoru právě jedno řešení.

Symbolický zápis konstrukce:

1. o; $T \in o \wedge o \perp \tau$
2. S_{AT}; S_{AT} je střed AT
3. ρ; $S_{AT} \in \rho \wedge \rho \perp AT$
4. S; $S \equiv o \cap \rho$
5. κ; $\kappa\,(S, |ST|)$

Prostorová konstrukce:



Úloha 2.10:

V RP či ve VRP načrtněte a stručně slovně či symbolicky zapište postup sestrojení koule, jsou-li dány tři body *A, B, C* příslušné kulové plochy dané koule a poloměr *r* koule.

Úloha 2.11:

Danou přímkou *p* veďte tečné roviny τ_1, τ_2 k dané kulové ploše $\kappa\,(S, r)$. V RP či ve VRP načrtněte a stručně slovně či symbolicky zapište postup sestrojení tečných rovin τ_1, τ_2.

2.3 ROVINNÉ ŘEZY HRANOLŮ A JEHLANŮ

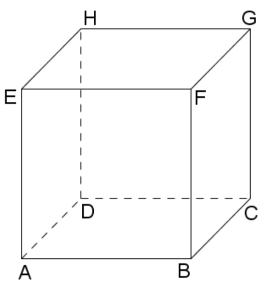
Obsahem této podkapitoly jsou vzorové příklady, ale i úlohy k procvičení sestrojení rovinných řezů hranolů a jehlanů. Na weblinku https://www.geogebra.org/m/qwyzkk92 se v tzv. GeoGebra knize s názvem „Rovinné řezy základních těles_student“ nacházejí prostorová zadání úloh k procvičení v podobě dynamických online appletů vytvořených v programu GeoGebra. U těchto online appletů jsou též zobrazeny nástroje a příkazy programu, pomocí nichž je možné ve 3D okně programu GeoGebra zkusit úlohy prostorově vyřešit. Vzorová řešení úloh k procvičení jsou umístěna v GeoGebra knize s názvem „Rovinné řezy základních těles _učitel“ nacházející se na weblinku https://www.geogebra.org/m/pht5gqzn.

Průnik hranatého tělesa rovinou ρ, která není vrcholová (tzn. neprochází žádným vrcholem hranatého tělesa), se nazývá ***řez*** tohoto ***hranatého tělesa rovinou*** ρ. Řezem je v obecném případě rovinný *n*-úhelník, kde $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$ (tj. např. trojúhelník, čtyřúhelník, pětiúhelník, ...), jehož vrcholy jsou průsečíky hran hranatého tělesa s rovinou řezu ρ a jehož stranami jsou průniky stěn hranatého tělesa s rovinou řezu ρ. Průnikem roviny řezu ρ s povrchem tělesa je potom tedy obvod příslušného rovinného *n*-úhelníku.

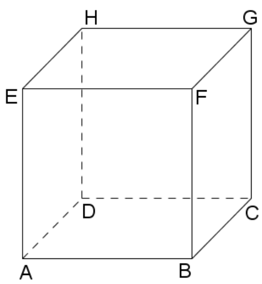
Úloha 2.12:

Určete roviny řezu tak, aby proťaly krychli v:

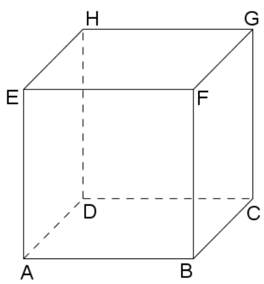
a) trojúhelníku



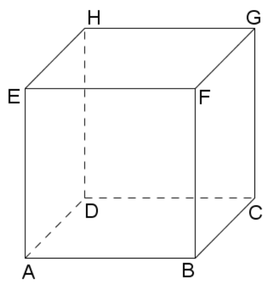
b) obdélníku



c) pětiúhelníku



d) šestiúhelníku



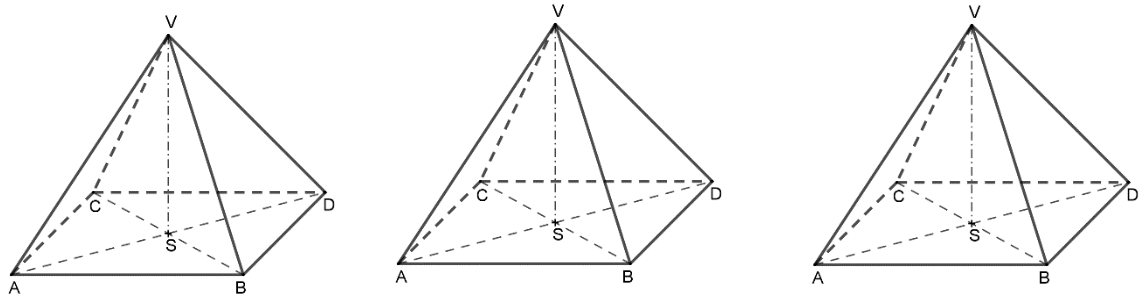
Úloha 2.13:

Proč nemůže být průnikem krychle a roviny řezu sedmiúhelník?

Úloha 2.14:

Určete roviny řezu tak, aby proťaly pravidelný čtyřboký jehlan v:

a) trojúhelníku b) čtyřúhelníku c) pětiúhelníku



2.3.1 Rovinné řezy hranolů

Při sestrojování řezu hranolu rovinou, určenou např. trojicí nekolineárních bodů, určujeme postupně další vrcholy *n*-úhelníkového řezu jako průsečíky (vhodných) hran tělesa s rovinou řezu.

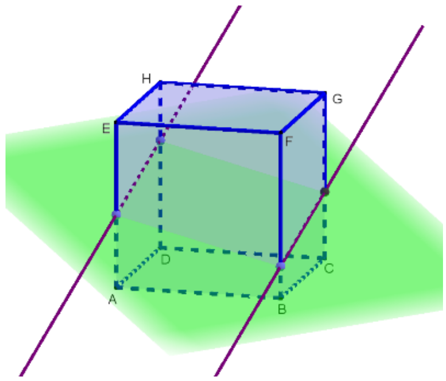
Lze říci, že existují tři způsoby, jakými je možné určit rovinný řez hranolu. Při konstrukcích řezů není však třeba se omezit pouze na jeden způsob řešení, způsoby lze vzájemně různě kombinovat. Ve vzorových příkladech jsou ukázány jednotlivé způsoby řešení samostatně.

2.3.1.1 Sestrojení „stran" řezu

Strany řezu, tzn. průsečnice roviny řezu s rovinami jednotlivých stěn hranolu, určíme snadno na základě dvou následujících vět.

***Věta* 2.1**: Leží-li dva různé body v rovině, pak přímka jimi určená leží také v této rovině.

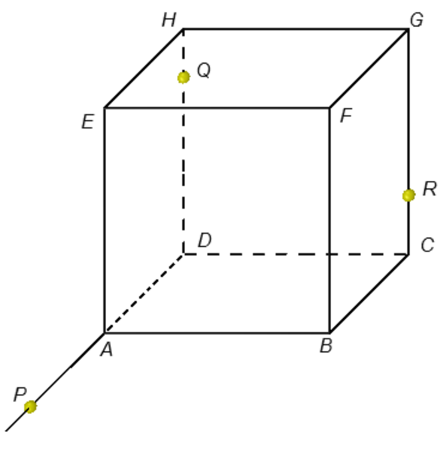
***Věta* 2.2**: Dvě navzájem rovnoběžné roviny protíná třetí rovina, která je s nimi různoběžná, ve dvou navzájem rovnoběžných přímkách.



Větu 2 však můžeme aplikovat pouze při sestrojování stran řezu na protilehlých a zároveň rovnoběžných stěnách hranolu.

Příklad 2.5:

Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH* rovinou $\rho \equiv PQR$ pomocí sestrojení stran řezu.



Vzorové řešení:

Při sestrojování řezu krychle danou rovinou nejprve zjistíme, zda alespoň 2 body tvořící danou rovinu leží v jedné stěně krychle. V našem případě leží v levé boční stěně krychle body *P, Q* a v zadní stěně krychle leží body *Q, R*. Uvedenými dvojicemi bodů lze v příslušných rovinách vést přímky, přitom přímka *PQ* protne hranu *AD* krychle v bodě *S*.

Bod *S* leží na hraně *AE*, tj. na průsečnici levé boční stěny a přední stěny krychle. A protože přímka *QR* leží v zadní stěně krychle, lze dle *věty* 2 vést bodem *S* v přední stěně krychle přímku *s* rovnoběžnou s přímkou *QR*.

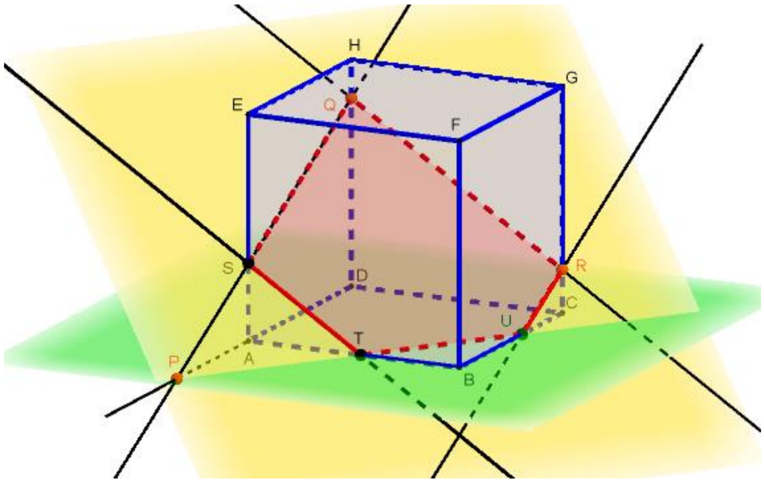
Průsečík *T* přímky *s* a hrany *AB* je další vrchol hledaného řezu. Analogicky vedeme v pravé boční stěně bodem *R* přímku *r* rovnoběžnou s přímkou *PQ*. Průsečík *U* přímky *r* a hrany *BC* je poslední hledaný vrchol řezu dané krychle rovinou $\rho \equiv PQR$.

Nakonec určíme viditelnost stran řezu. Strany řezu, které leží ve viditelných stěnách krychle, jsou viditelné a rýsujeme je plnou čarou. V opačném případě rýsujeme neviditelné strany řezu čárkovanou čarou.

Symbolický zápis konstrukce:

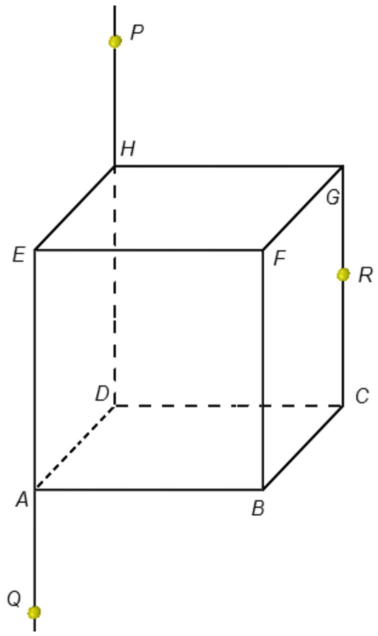
1. ↔ PQ
2. S; S ≡ AD ∩ ↔ PQ
3. ↔ QR
4. s; S ∈ s ∧ s // ↔ QR
5. T; T ≡ s ∩ AB
6. r; R ∈ r ∧ r // ↔ PQ
7. U; U ≡ r ∩ BC
8. pětiúhelník QSTUR

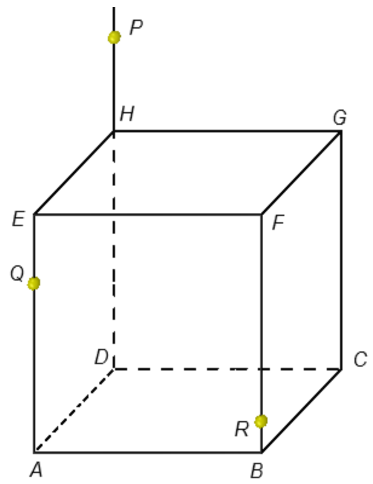
Prostorová konstrukce:



<u>Úloha 2.15:</u>

Sestrojte řezy krychlí *ABCDEFGH* rovinami $\rho \equiv PQR$ pomocí sestrojení stran řezu.

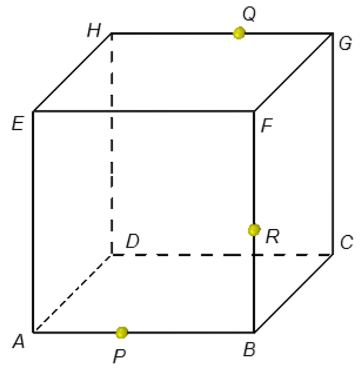




2.3.1.2 Sestrojení „vrcholů“ řezu

Při sestrojování vrcholů řezu s výhodou využíváme pomocných bodů, které jsou průsečíky průsečnic tří různoběžných rovin, tj. roviny řezu a dvou sousedních stěn hranolu. Tato konstrukce plyne z platnosti následující věty.

***Věta* 3**: Jsou-li každé dvě ze tří rovin různoběžné a mají-li tyto tři roviny společný bod, procházejí tímto společným bodem všechny tři jejich průsečnice.



<u>Příklad 2.6:</u>

Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH* rovinou $\rho \equiv PQR$ pomocí sestrojení vrcholů řezu.

Vzorové řešení:

Při sestrojování řezu krychle danou rovinou $\rho \equiv PQR$ opět nejprve zjistíme, zda alespoň 2 body tvořící danou rovinu leží v jedné stěně krychle.

Tentokráte leží v přední stěně krychle body *P* a *R.* Lze jimi tedy proložit přímku *PR.* A protože třetí daný bod roviny ρ leží v horní stěně krychle, sestrojíme průsečík *1* přímky *PR* s rovinou horní stěny krychle jako průsečík přímek *PR* a *EF*, neboť přímka *EF* je průsečnicí rovin přední a horní stěny krychle, tzn. leží v obou z nich.

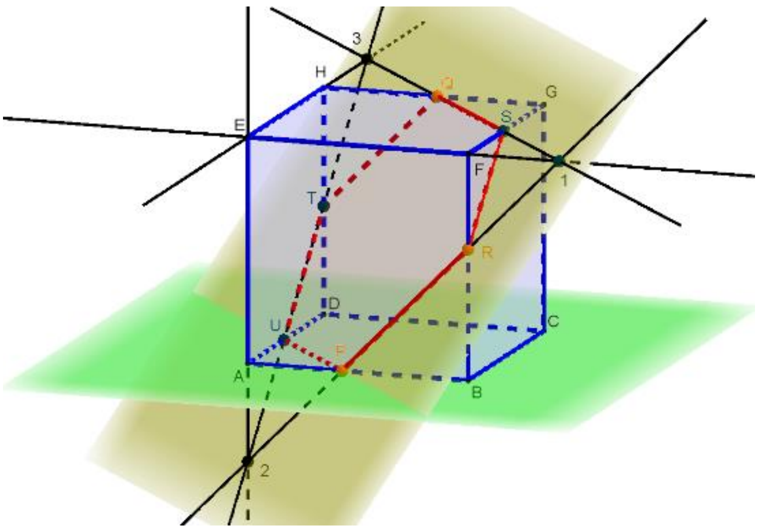
Nyní v rovině horní stěny krychle sestrojíme přímku *1Q,* která protne hranu *FG* ve vrcholu *S* řezu krychle rovinou ρ. Chceme-li sestrojit vrcholy řezu v levé boční stěně krychle, využijeme průsečíku *2* přímek *PR, AE* a průsečíku *3* přímek *1Q, EH.* Přímka *23* ležící v rovině levé boční stěny krychle protne po řadě hrany *DH, AD* ve vrcholech *T, U* šestiúhelníkového řezu *PRSQTU*, který vyrýsujeme.

Nakonec určíme viditelnost stran řezu. Strany řezu, které leží ve viditelných stěnách krychle, jsou viditelné a rýsujeme je plnou čarou. Neviditelné strany řezu rýsujeme čárkovanou čarou.

Symbolický zápis konstrukce:

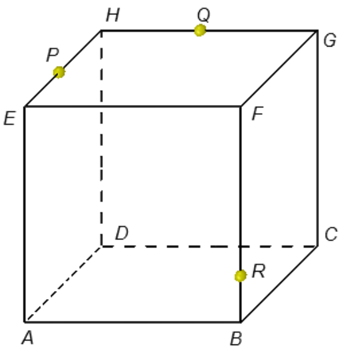
1. ↔ PR
2. ↔ EF
3. 1; 1 ≡ ↔ EF ∩ ↔ PQ
4. ↔ AE
5. 2; 2 ≡ ↔ AE ∩ ↔ PR
6. ↔ 1Q
7. S; S ≡ FG ∩ ↔ 1Q
8. ↔ EH
9. 3; 3 ≡ ↔ EH ∩ ↔ 1Q
10. ↔ 23
11. T; T ≡ DH ∩ ↔ 23
12. U; U ≡ AD ∩ ↔ 23
13. šestiúhelník PRSQTU

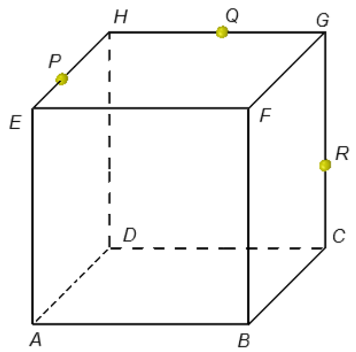
Prostorová konstrukce:



<u>Úloha 2.16:</u>

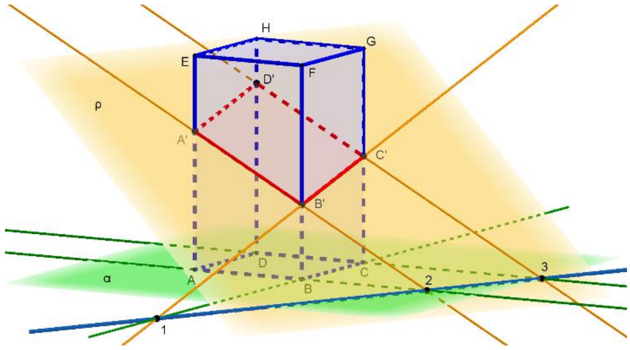
Sestrojte řezy krychlí *ABCDEFGH* rovinami $\rho \equiv PQR$ pomocí sestrojení vrcholů řezu.





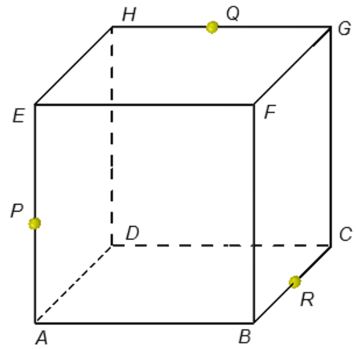
2.3.1.3 Sestrojení řezu pomocí osové afinity v prostoru

Při konstrukci řezu *n*-bokého hranolu, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, rovinou ρ, která není vrcholová, ani rovnoběžná s rovinou α řídicího *n*-úhelníku *n*-bokého hranolu, lze využít prostorové zobrazení zvané **osová afinita**. V osové afinitě určené směrem pobočných hran *n*-bokého hranolu a rovinami ρ a α jsou řídicí *n*-úhelník hranolu a řez afinně sdruženými útvary.



V případě kolmého čtyřbokého hranolu *ABCDEFGH* se přímky stran *A´B´, B´C´, C´D´* a *D´A´* čtyřúhelníkového řezu *A´B´C´D´* a jim po řadě odpovídající přímky stran *AB, BC, CD* a *DA* řídicího čtyřúhelníku *ABCD* dolní podstavy kolmého čtyřbokého hranolu *ABCDEFGH* protínají na přímce *o* (na tzv. ose afinity), která je průsečnicí roviny řezu ρ a roviny α dolní podstavy hranolu. Párem odpovídajících si bodů v osové afinitě se směrem kolmým k rovině α rozumíme např. bod *A* v rovině α a jemu odpovídající bod *A´* v rovině ρ řezu.

<u>Příklad 2.7:</u>
Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH* rovinou $\rho \equiv PQR$ pomocí osové afinity.



Vzorové řešení:

Při sestrojování řezu krychle danou rovinou $\rho \equiv PQR$ opět nejprve zjistíme, zda alespoň 2 body tvořící danou rovinu leží v jedné stěně krychle.

V tomto případě však leží všechny 3 zadané body v různých stěnách krychle a na navzájem mimoběžných hranách krychle. Sestrojíme tedy nejprve průsečík jedné z trojice daných přímek *PQ, QR* či *PR* s rovinou dolní stěny krychle. Zde se nabízí sestrojit průsečík *1* přímky *PQ* s rovinou dolní stěny krychle pomocí pravoúhlého průmětu P_1Q_1 přímky *PQ*, neboť třetí zadaný bod *R* také leží v rovině dolní stěny krychle. Body *1, R* jsou body osy *o* osové afinity se směrem kolmým k rovině dolní stěny krychle.

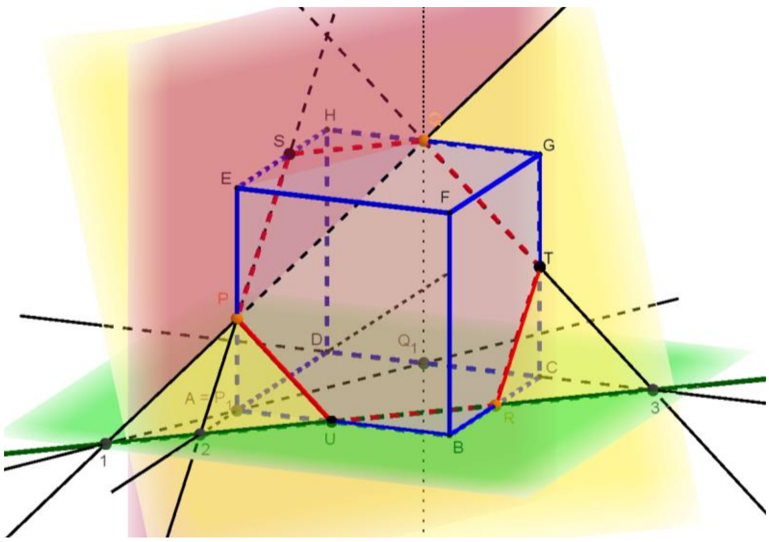
Další vrcholy řezu sestrojíme pomocí dané osové afinity. Zkonstruujeme body *2, 3* po řadě jako průsečíky přímek hran *AD, CD* s osou *o* afinity. Vrcholy řezu *S, T* jsou průsečíky přímek *23, 3Q* po řadě s hranami *EH, CG*. Zbývající vrchol *U* řezu je průsečík osy *o* afinity s hranou *AB*. Vykreslíme šestiúhelníkový řez *PRSQTU*.

Nakonec určíme viditelnost stran řezu. Strany řezu, které leží ve viditelných stěnách krychle, jsou viditelné a rýsujeme je plnou čarou. Neviditelné strany řezu rýsujeme čárkovanou čarou.

Symbolický zápis konstrukce:

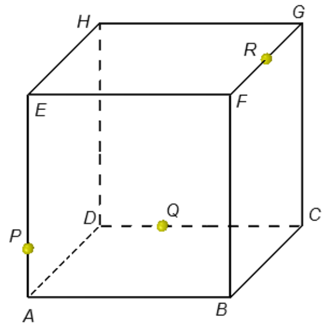
1. α ≡ ABC
2. k; Q ∈ k ∧ k ⊥ α
3. Q_1; Q_1 ≡ k ∩ CD
4. P_1; P_1 ≡ A
5. 1; 1 ≡ ↔ PQ ∩ ↔ P_1Q_1
6. o; o ≡ 1R
7. 2; 2 ≡ AD ∩ o
8. S; S ≡ EH ∩ ↔ 2P
9. 3; 3 ≡ CD ∩ o
10. T; T ≡ CG ∩ ↔ 3Q
11. U; U ≡ AB ∩ o
12. šestiúhelník PURTQS

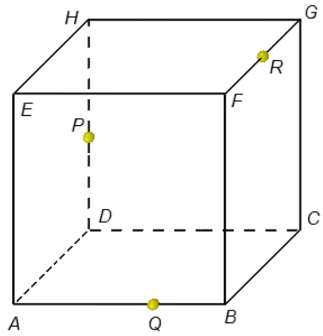
Prostorová konstrukce:



Úloha 2.17:

Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH* rovinou $\rho \equiv PQR$ pomocí osové afinity.

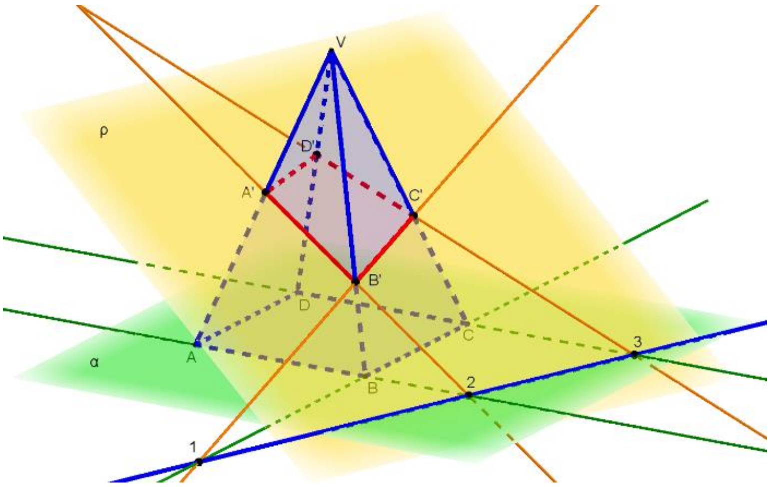




2.3.2 Rovinné řezy jehlanů

Při konstrukci řezu *n*-bokého jehlanu, $n \in \mathbf{N}$ a $n \geq 3$, rovinou ρ, která není vrcholová, ani rovnoběžná s rovinou α řídicího *n*-úhelníku *n*-bokého jehlanu, lze využít prostorové zobrazení zvané **perspektivní kolineace**. V perspektivní kolineaci určené hlavním vrcholem *V* *n*-bokého jehlanu a osou *o* kolineace, která je průsečnicí roviny ρ řezu a roviny α řídicího *n*-úhelníku jehlanu, jsou řídicí *n*-úhelník jehlanu a řez kolineárně sdruženými útvary.

V případě pravidelného čtyřbokého jehlanu *ABCDV* se přímky stran *A´B´, B´C´, C´D´* a *D´A´* čtyřúhelníkového řezu *A´B´C´D´* a jim po řadě odpovídající přímky stran *AB, BC, CD* a *DA* řídicího čtyřúhelníku *ABCD* dolní podstavy pravidelného čtyřbokého jehlanu *ABCDV* protínají na přímce *o* (na tzv. ose kolineace), která je průsečnicí roviny řezu ρ a roviny α dolní podstavy jehlanu. Párem odpovídajících si bodů v perspektivní kolineaci se středem v hlavním vrcholu *V* jehlanu jsou např. bod *A* v rovině α a jemu odpovídající bod *A´* v rovině ρ řezu.

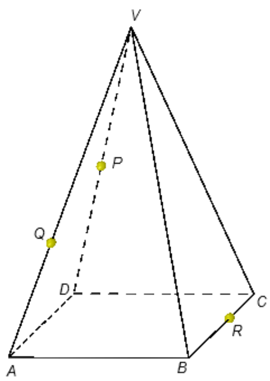


Příklad 2.8:

Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu *ABCDV* rovinou $\rho \equiv PQR$ pomocí perspektivní kolineace.

Vzorové řešení:

Při sestrojování řezu pravidelného čtyřbokého jehlanu danou rovinou $\rho \equiv PQR$ nejprve zjistíme, zda alespoň dva body tvořící danou rovinu leží v jedné stěně jehlanu. Při daném zadání leží body *P, Q* v levé boční stěně jehlanu, lze jimi tedy proložit přímku. Dále sestrojíme průsečík přímky *PQ* s rovinou čtvercové podstavy jehlanu a to následujícím způsobem. Bod *P* promítneme z vrcholu *V* do bodu $D \equiv P_1$, analogicky bod *Q* promítneme z vrcholu *V* do bodu $A \equiv Q_1$. Průsečík *1* přímek *PQ* a P_1Q_1 je bod osy *o* kolineace. V rovině čtvercové podstavy jehlanu leží též bod *R* roviny ρ řezu. Body *1* a *R* proložíme tedy osu *o* kolineace.

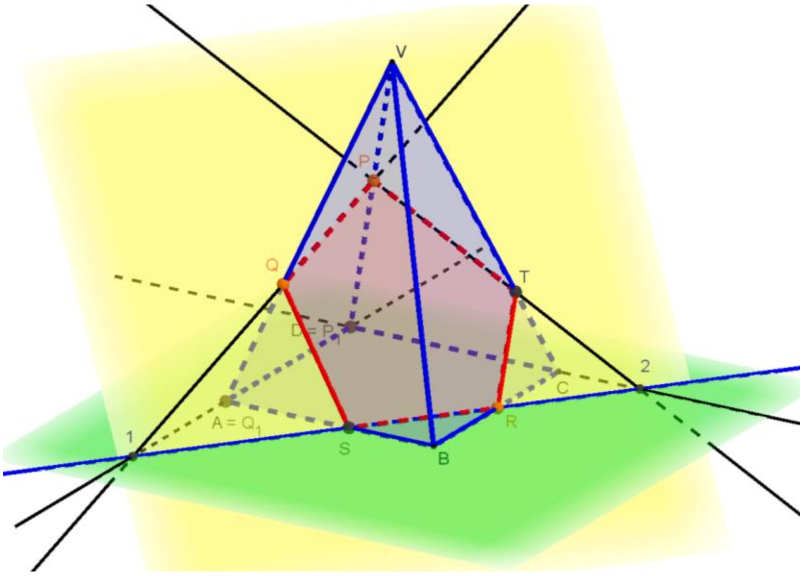


Osa *o* kolineace protne hranu *AB* jehlanu ve vrcholu *S* řezu. Následně sestrojíme průsečík *2* přímky *DC* s osou *o* kolineace. Přímka *2P*, která je kolineárně sdruženou s přímkou *DC* protne hranu *VC* ve vrcholu *T* řezu. Pětiúhelníkový řez *PQSRT* narýsujeme, přitom určíme viditelnost jednotlivých stran řezu. Strany řezu, které leží ve viditelných stěnách jehlanu, jsou viditelné a rýsujeme je plnou čarou. Neviditelné strany řezu rýsujeme čárkovanou čarou.

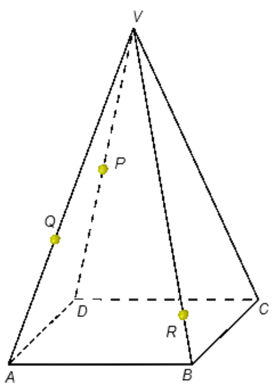
Symbolický zápis konstrukce:

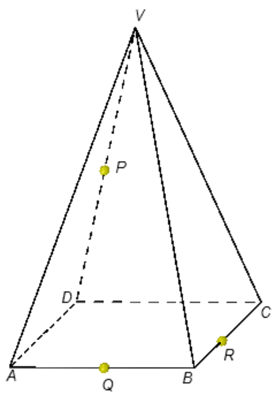
1. P_1; $P_1 \equiv D$
2. Q_1; $Q_1 \equiv A$
3. 1; $1 \equiv \leftrightarrow PQ \cap \leftrightarrow P_1Q_1$
4. o; $o \equiv 1R$
5. S; $S \equiv AB \cap o$
6. 2; $2 \equiv o \cap \leftrightarrow CD$
7. T; $T \equiv VC \cap \leftrightarrow 2P$
8. pětiúhelník PQSRT

Prostorová konstrukce:



<u>Úloha 2.18:</u>
Sestrojte řezy pravidelných čtyřbokých jehlanů *ABCDV* rovinami $\rho \equiv PQR$ pomocí perspektivní kolineace.





2.4 PRAVOÚHLÉ POHLEDY NA TĚLESA

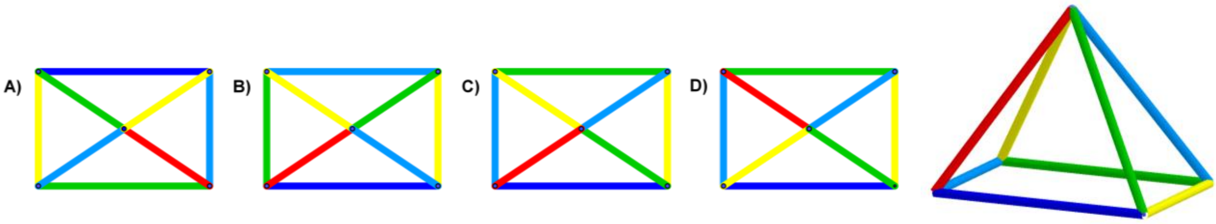
Tato část obsahuje několik vybraných propedeutických úloh vedoucích k porozumění základních principů a vlastností Mongeova promítání. Zadání dalších úloh podobného typu jsou vložena do GeoGebra knihy s názvem „Stereometrické rozcvičky_student“ na weblinku https://www.geogebra.org/m/k6cf8ssz, zadání společně se vzorovými řešeními týchž úloh jsou umístěna do GeoGebra knihy s názvem „Stereometrické rozcvičky_učitel“ umístěné na weblinku https://www.geogebra.org/m/k5vymdym. Řešení zmiňovaných úloh nevede pouze k pochopení základních principů a vlastností Mongeova promítání, ale i k trénování a rozvíjení prostorové představivosti.

2.4.1 Pravoúhlé pohledy na tělesa shora

Již na nižších stupních škol jsou s výhodou zařazovány úlohy, v nichž mají žáci za úkol přiřadit k modelům těles, resp. k průmětům těles zakreslených v různých promítáních odpovídající pohledy na ně shora. Tento odstavec obsahuje tři takovéto ilustrativní úlohy.

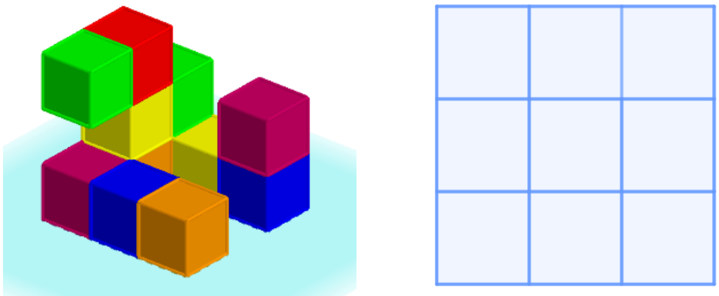
Úloha 2.19:

Rozhodněte, pod kterým písmenem se skrývá správný pohled shora na hrany modelu čtyřbokého jehlanu vyrobeného z barevných brček.



Úloha 2.20:

V připravené mřížce vybarvěte čtverce tak, aby odpovídaly pohledu na barevné krychlové těleso v pohledu shora.

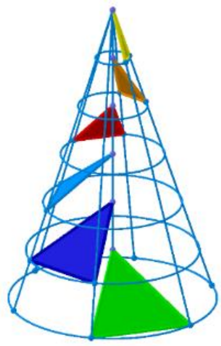


Úloha 2.21:

V parku se mezi vystavenými výtvarnými výtvory nachází kovová konstrukce kuželového tvaru. Ke kovové konstrukci jsou vždy v 1/6 její výšky připevněny barevné trojúhelníkové látkové plachty, jak je znázorněno na obrázku.

Jak uvidí tuto kovovou konstrukci s připevněnými barevnými trojúhelníkovými látkami pilot letadla při kolmém pohledu na konstrukci shora?

Konstrukci společně s barevnými trojúhelníkovými látkami při kolmém pohledu shora načrtněte.

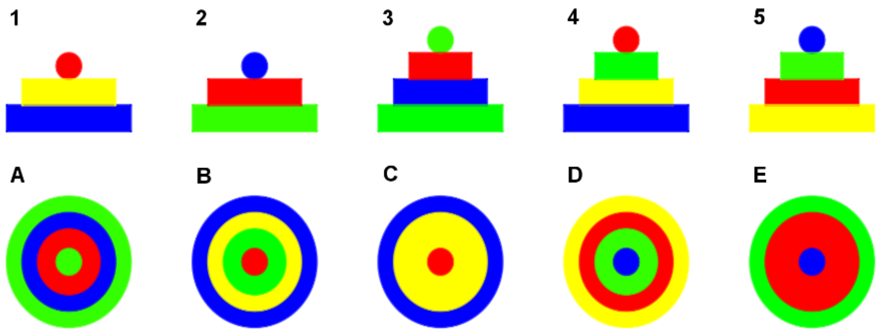


2.4.2 Pravoúhlé pohledy na tělesa shora a zpředu

Ne vždy je pohled shora na dané těleso dostačující, abychom tomuto pohledu byli zpět jednoznačně schopni přiřadit skutečný model tělesa, anebo průmět modelu tělesa např. v rovnoběžném či jiném dalším promítání. Důsledkem toho využijeme kromě pohledu na těleso shora i pohled na téže těleso zpředu, který uvedenou jednoznačnost přiřazení více zpřesní.

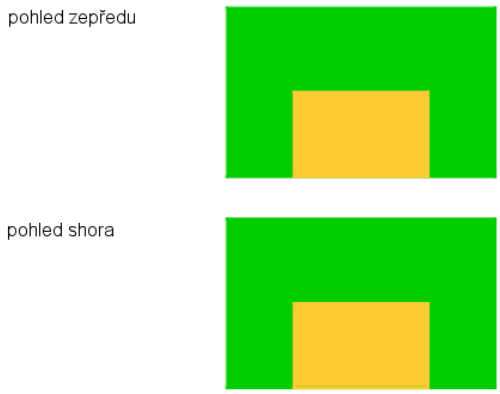
Úloha 2.22:

Na obrázku jsou v první řadě zobrazeny pohledy zpředu na barevné „Hanojské věže“, ve druhé řadě jsou zobrazeny pohledy na ně shora. Malířovi se ale trochu pomíchaly barvy, a tak pohledy shora vybarvil zpřeházeně. Vytvořte sobě odpovídající dvojice pohledů zpředu a shora daných „Hanojských věží“.



Úloha 2.23:

Dva geometrické obrazce představují dva pohledy na seskupení dvou těles. Horní kresba představuje pohled na seskupení těles zepředu a dolní kresba představuje pohled na seskupení těles shora. Načrtněte seskupení těles ve VRP.



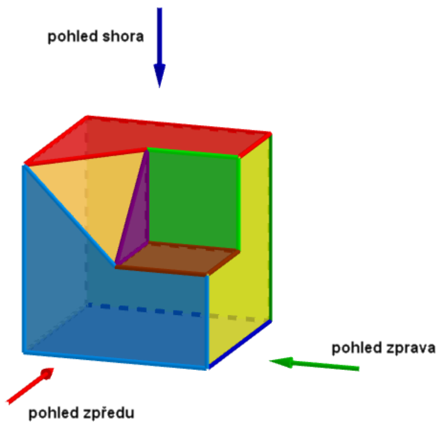
2.4.3 Pravoúhlé pohledy na tělesa shora, zpředu a z boku

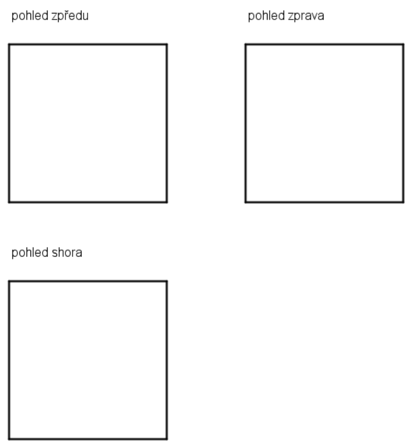
V tomto odstavci přidáme ke dvěma výše uvedeným pohledům na tělesa ještě i pohled třetí, a to pohled z boku (zprava či zleva). Přidání tohoto třetího pohledu na těleso precizuje proces přiřazení zobrazených pohledů skutečnému modelu tělesa či jeho průmětu v nějakém zobrazení, případně naopak.

Úloha 2.24:

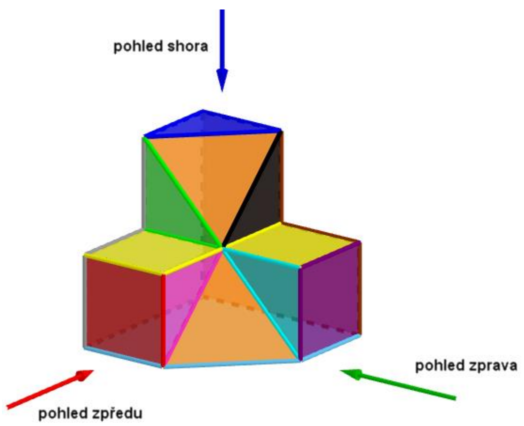
Do připravených čtverců doplňte pohledy na „vyříznutou" a „seříznutou" krychli z pohledu zpředu, zprava a shora. Šipky v obrázcích ukazují směry pohledů.

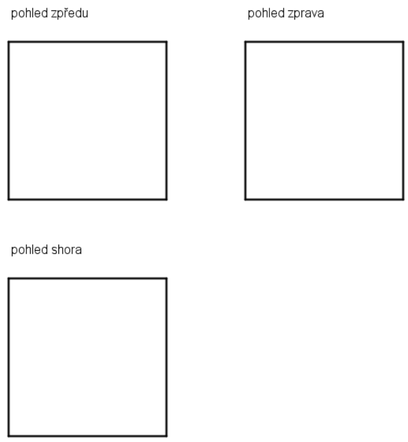
a)





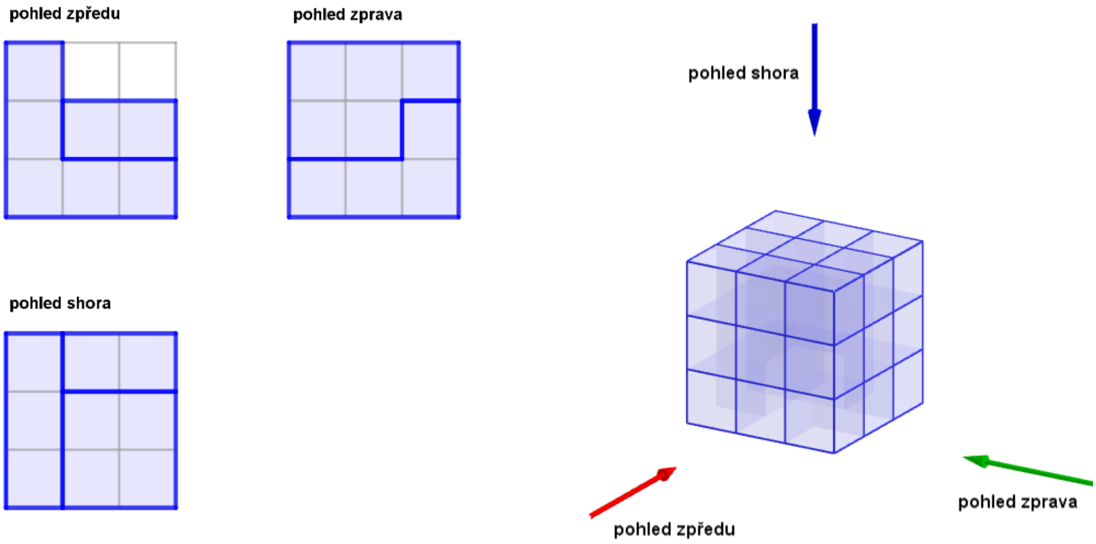
b)





Úloha 2.25:

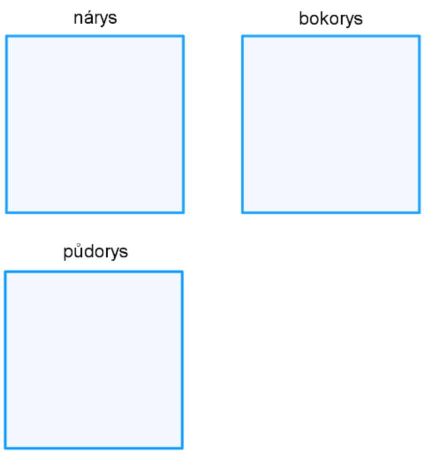
Jsou dány pohledy zpředu, zprava a shora na krychlové těleso. Do obrázku průmětu krychle zobrazte na základě daných pohledů průmět krychlového tělesa.

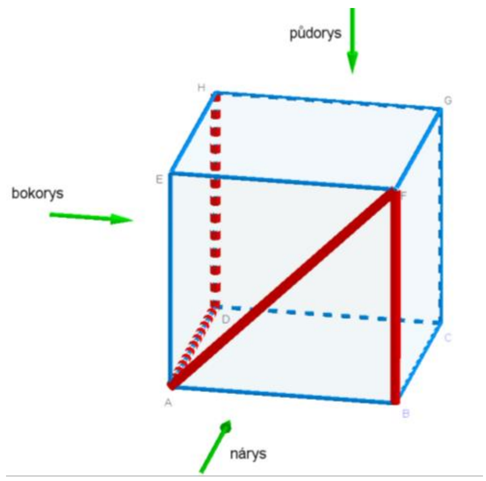


Úloha 2.26:

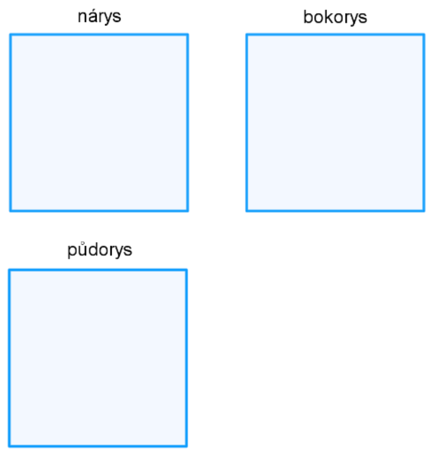
Do obrázků čtvercových stěn zakreslete půdorys, nárys a bokorys červeného drátu, který je celistvý a je znázorněn na krychli zobrazené v rovnoběžném promítání.

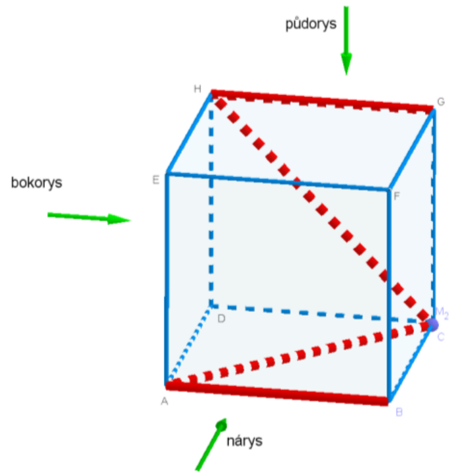
a)





b)

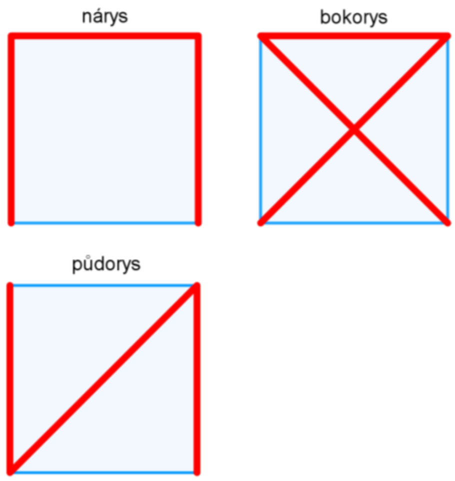


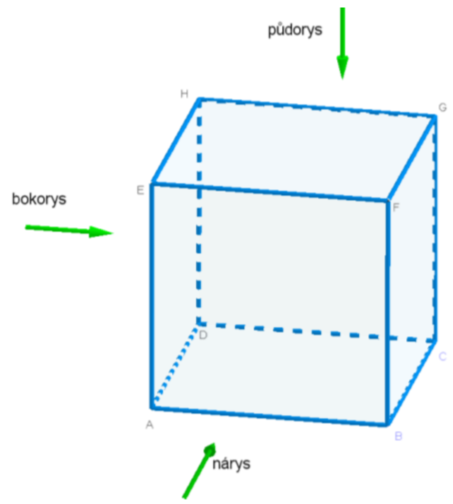


Úloha 2.27:

Do obrázku krychle v rovnoběžném promítání zobrazte červený drát, který je celistvý, na základě jeho půdorysu, nárysu a bokorysu.

a)





b)